ВМК МГУ – ШКОЛЕ

Н. Д. Золотарёва, Ю. А. Попов, Н. Л. Семендяева, М. В. Федотов

МАТЕМАТИКА

СБОРНИК ЗАДАЧ

по базовому курсу

ЕГЭ

ОЛИМПИАДЫ

ЭКЗАМЕНЫ В ВУЗ

ИЗДАТЕЛЬСТВО БИНОМ

ВМК МГУ – ШКОЛЕ

Н. Д. Золотарёва, Ю. А. Попов, Н. Л. Семендяева, М. В. Федотов

МАТЕМАТИКА

СБОРНИК ЗАДАЧ
по базовому курсу

Учебно-методическое пособие

Под редакцией
М. В. Федотова

Электронное издание

Москва
БИНОМ. Лаборатория знаний
2015

УДК 373.3:51
ББК 22.1я729
З-80

Золотарёва Н. Д.

З-80 Математика. Сборник задач по базовому курсу [Электронный ресурс] : учебно-методическое пособие / Н. Д. Золотарёва, Ю. А. Попов, Н. Л. Семендяева, М. В. Федотов ; под ред. М. В. Федотова. — Эл. изд. — Электрон. текстовые дан. (1 файл pdf : 243 с.). — М. : БИНОМ. Лаборатория знаний, 2015. — (ВМК МГУ — школе). — Систем. требования: Adobe Reader XI ; экран 10".

ISBN 978-5-9963-2916-8

Настоящее пособие составлено преподавателями факультета ВМК МГУ имени М. В. Ломоносова на основе задач вступительных экзаменов по математике в МГУ и задач единого государственного экзамена. Пособие содержит теоретический материал, примеры с решениями и подборку задач.

Рекомендуется школьникам при подготовке к сдаче единого государственного экзамена, абитуриентам при подготовке к поступлению как в МГУ, так и в другие вузы, учителям математики, репетиторам, руководителям кружков и факультативов, преподавателям подготовительных курсов.

УДК 373.3:51
ББК 22.1я729

Деривативное электронное издание на основе печатного аналога: Математика. Сборник задач по базовому курсу : учебно-методическое пособие / Н. Д. Золотарёва, Ю. А. Попов, Н. Л. Семендяева, М. В. Федотов ; под ред. М. В. Федотова. — М. : БИНОМ. Лаборатория знаний, 2015. — 238 с. : ил. — (ВМК МГУ — школе). — ISBN 978-5-9963-1933-6.

ISBN 978-5-9963-2916-8

Оглавление

От редактора

Уважаемый читатель, Вы держите в руках одну из книг серии «ВМК МГУ – школе». Учебно-методические пособия, входящие в эту серию, являются результатом более чем десятилетнего труда коллектива авторов, работающих на подготовительных курсах факультета Вычислительной математики и кибернетики (ВМК) МГУ имени М. В. Ломоносова. Сначала были созданы пособия для очных подготовительных курсов, затем были разработаны электронные версии учебников, используемые при дистанционном обучении. На основе этого опыта подготовлена серия книг для старшеклассников, одной из которых и является настоящее пособие.

Сейчас изданы или готовятся к изданию пособия по алгебре, геометрии и физике. В дальнейшем предполагается продолжить эту серию силами преподавателей информатики подготовительных курсов факультета ВМК МГУ и выпустить аналогичные пособия по информатике.

По каждому предмету должны выйти два пособия: базовый курс и курс, содержащий сложные задачи части C единого государственного экзамена и нестандартные задачи вступительных экзаменов в вузы (в основном это задачи различных факультетов МГУ имени М. В. Ломоносова). Базовый курс содержит все разделы соответствующего предмета, необходимые для решения задач ЕГЭ частей A, B и некоторых задач части C, а также первой половины задач вариантов вступительных экзаменов в вузы. Второе пособие содержит задачи, научившись решать которые, Вы сможете решать все задачи ЕГЭ и все или почти все задачи олимпиад и вступительных экзаменов в вузы (за отведённое время можно просто физически не успеть решить все задачи).

Отличительной особенностью наших пособий является **спиралевидная схема подачи материала**, когда каждая тема повторяется несколько раз, причём каждый раз на более сложном уровне, чем в предыдущий. Это позволяет не забывать пройденный материал и постепенно подходить к сложным задачам.

Директор учебного центра
факультета Вычислительной математики и кибернетики
МГУ имени М. В. Ломоносова
доцент кафедры математической физики
М. В. Федотов

Предисловие

«Базовый курс» рассчитан на закрепление школьного материала по математике и приобретение навыков, необходимых для решения задач ЕГЭ и стандартных задач вступительных экзаменов в вуз.

Предлагаемый курс изначально не предполагает знаний, выходящих за рамки базовой школьной программы. Все приёмы, необходимые для решения задач, демонстрируются по ходу изучения материала.

Задачи в разделах расположены по принципу «*от простого – к сложному*». Аналогичная ситуация имеет место и с последовательностью разделов, поэтому сами разделы и задачи в разделах рекомендуется изучать в предложенном порядке. Приступать к решению задач надо после изучения соответствующего теоретического материала и разбора примеров.

При составлении пособия авторы придерживались спиралевидного принципа подачи материала: сначала предлагаются простые задачи по всем основным разделам математики и методы их решения, затем рассматриваются более сложные задачи, для решения которых требуются более сложные методы или их комбинации. Это позволяет не только закрепить, но и осмыслить на новом уровне уже пройденный материал. Такая схема обучения с успехом применяется на очных и дистанционных подготовительных курсах факультета ВМК МГУ имени М. В. Ломоносова.

Каждый раздел пособия содержит теоретические основы, описание методов решения задач, примеры применения методов и набор заданий для решения.

Запись (У) после номера задачи означает, что задача предлагалась на устном экзамене по математике в МГУ.

Для задач письменного экзамена сначала идет сокращенное название факультета, затем – год, в котором была задача (если после года в скобках идет цифра 1 или 2 – это значит, что эта задача была на весенней олимпиаде факультета; на мехмате и физфаке весной проходили две олимпиады; на ВМК, геологическом, химическом, географическом факультетах и факультете почвоведения – одна олимпиада весной). После точки идет номер задачи в варианте (обычно, чем больше номер, тем сложнее задача в данном варианте). Например, (ВМК-98.3) означает, что задача была в 1998 году летом на вступительных экзаменах на факультете ВМК, третьим номером в варианте, а (М/м-97(2).1) означает, что задача была в 1997 году на второй весенней олимпиаде механико-математического факультета первым номером в варианте.

Сокращения названий факультетов, принятые в данной книге

М/м – механико-математический факультет,
ВМК – факультет Вычислительной математики и кибернетики (.Б – отделение бакалавров по прикладной математике, .И – отделение бакалавров по информационным технологиям),
Физ – физический факультет,
Хим – химический факультет,
ВКНМ – Высший колледж наук о материалах,
ФНМ – факультет наук о материалах (до 2000 года – ВКНМ)
Биол – биологический факультет,
Почв – факультет почвоведения,

Геол – геологический факультет (.ОГ – отделение общей геологии),
Геогр – географический факультет,
Экон – экономический факультет (.М – отделение менеджмента, .К – отделение экономической кибернетики, .В – вечернее отделение),
ВШБ – Высшая школа бизнеса,
Псих – факультет психологии,
Фил – философский факультет,
Филол – филологический факультет,
Соц – социологический факультет,
ИСАА – Институт стран Азии и Африки,
ФГУ – факультет государственного управления (отделение «Антикризисное управление»),
ЧФ – Черноморский филиал МГУ (г. Севастополь).

Используемые обозначения

$\{a\}$ – множество, состоящее из одного элемента a;
$\cup$ – объединение; $\cap$ – пересечение; $\emptyset$ – пустое множество;
$\in$ – знак принадлежности; $\subset$ – знак включения подмножества;
$\forall$ – для любого; $A \backslash B$ – разность множеств A и B;
$\Longrightarrow$ – следовательно; $\Longleftrightarrow$ – тогда и только тогда;
$\mathbb{N}$ – множество всех натуральных чисел; $\mathbb{N}_0 = \mathbb{N} \cup \{0\}$;
$\mathbb{Z}$ – множество всех целых чисел;
$\mathbb{Q}$ – множество всех рациональных чисел;
$\mathbb{R}$ – множество всех действительных чисел;
ОДЗ – область допустимых значений;

$\left\{\begin{array}{l} \ldots \\ \ldots \end{array}\right.$ – знак системы, означающий, что должны выполняться все условия, объединённые этим знаком;

$\left[\begin{array}{l} \ldots \\ \ldots \end{array}\right.$ – знак совокупности, означающий, что должно выполняться хотя бы одно из условий, объединённых этим знаком.

Рекомендуется школьникам при подготовке к сдаче единого государственного экзамена, абитуриентам при подготовке к поступлению как в МГУ, так и другие вузы, учителям математики, репетиторам, руководителям кружков и факультативов, преподавателям подготовительных курсов.

Желаем удачи!

Часть I. Алгебра

1. Преобразование алгебраических выражений, простейшие уравнения и неравенства

1.1. Формулы сокращённого умножения, преобразование алгебраических выражений

Теоретический материал

В этом разделе собраны задачи, при решении которых используются различные полезные формулы и преобразования: формулы сокращённого умножения, выделение полного квадрата, домножение на сопряжённое выражение.

Необходимо знать и уметь применять следующие формулы:

$$a^2 - b^2 = (a-b)(a+b); \tag{1}$$

$$(a+b)^2 = a^2 + 2ab + b^2; \tag{2}$$

$$(a-b)^2 = a^2 - 2ab + b^2; \tag{3}$$

$$a^3 + b^3 = (a+b)(a^2 - ab + b^2); \tag{4}$$

$$a^3 - b^3 = (a-b)(a^2 + ab + b^2); \tag{5}$$

$$(a+b)^3 = a^3 + 3a^2b + 3ab^2 + b^3; \tag{6}$$

$$(a-b)^3 = a^3 - 3a^2b + 3ab^2 - b^3; \tag{7}$$

причём все формулы нужно узнавать не только «слева направо», но и «справа налево».

Применение формул сокращённого умножения является одним из самых простых способов разложения алгебраического выражения на множители. Все формулы справедливы при любых вещественных a и b, которые сами могут являться числами, функциями или другими выражениями.

Помимо основных формул сокращённого умножения полезно знать и формулы для большего числа слагаемых, например:

$$(a+b+c)^2 = a^2 + b^2 + c^2 + 2ab + 2bc + 2ac.$$

В общем случае: квадрат суммы нескольких чисел есть сумма квадратов этих чисел плюс сумма всевозможных удвоенных попарных произведений.

Полезно знать также две следующие формулы, верные $\forall n \in \mathbb{N}$:

$$a^n - b^n = (a-b)(a^{n-1} + a^{n-2}b + a^{n-3}b^2 + ... + ab^{n-2} + b^{n-1});$$

$$a^{2n+1} + b^{2n+1} = (a+b)(a^{2n} - a^{2n-1}b + a^{2n-2}b^2 - ... - ab^{2n-1} + b^{2n}).$$

Примеры решения задач

П р и м е р 1. (Геол-98.1) Найти численное значение выражения $\left(\dfrac{9a^2-16b^2}{4b+3a} - \dfrac{a^2b-3ab^2}{ab}\right)^2 : \left(6ab - \dfrac{8a^3-b^3}{2a-b}\right)$.

Р е ш е н и е. Согласно формулам (1) и (5)

$$9a^2 - 16b^2 = (3a-4b)(3a+4b), \quad 8a^3 - b^3 = (2a-b)(4a^2+2ab+b^2).$$

Последовательно преобразуем исходное выражение:

$$\left(\frac{(3a-4b)(3a+4b)}{4b+3a} - \frac{ab(a-3b)}{ab}\right)^2 : \left(6ab - \frac{(2a-b)(4a^2+2ab+b^2)}{2a-b}\right) =$$

$$= (3a-4b-a+3b)^2 : (6ab-4a^2-2ab-b^2) = (2a-b)^2 : (4a^2-4ab+b^2)\cdot(-1) = -1.$$

Отметим, что выражение имеет смысл только при $4b+3a \neq 0$, $ab \neq 0$, $2a \neq b$.

О т в е т. -1 при $4b+3a \neq 0$, $ab \neq 0$, $2a \neq b$.

П р и м е р 2. (М/м-78.1) Выражение $\sqrt{\left|40\sqrt{2}-57\right|} - \sqrt{40\sqrt{2}+57}$ является целым числом. Найти это целое число.

Р е ш е н и е. *Первый способ.* Выделим полные квадраты в подкоренных выражениях:

$$\sqrt{\left|40\sqrt{2}-57\right|} - \sqrt{40\sqrt{2}+57} = \sqrt{57-40\sqrt{2}} - \sqrt{40\sqrt{2}+57} =$$

$$= \sqrt{32 - 2\cdot 4\sqrt{2}\cdot 5 + 25} - \sqrt{32 + 2\cdot 4\sqrt{2}\cdot 5 + 25} = \sqrt{\left(4\sqrt{2}-5\right)^2} - \sqrt{\left(4\sqrt{2}+5\right)^2} =$$

$$= \left|4\sqrt{2}-5\right| - \left(4\sqrt{2}+5\right) = 4\sqrt{2} - 5 - 4\sqrt{2} - 5 = -10.$$

З а м е ч а н и е. Коэффициенты полных квадратов можно найти методом неопределённых коэффициентов (ищем $a, b \in \mathbb{N}$):

$$57 + 40\sqrt{2} = \left(a + b\sqrt{2}\right)^2 = \left(a^2 + 2b^2\right) + 2ab\sqrt{2}.$$

Получаем систему уравнений $\begin{cases} a^2 + 2b^2 = 57, \\ ab = 20; \end{cases}$ значит, $b \in \{1; 2; 4; 5\}$, число a – нечётное. Подходит пара $a = 5$, $b = 4$; следовательно, $57 + 40\sqrt{2} = \left(5 + 4\sqrt{2}\right)^2$.

Аналогично $57 - 40\sqrt{2} = \left(5 - 4\sqrt{2}\right)^2$.

Второй способ. Примем числовое значение выражения за параметр и решим соответствующее уравнение.

Обозначим за A выражение $\sqrt{|40\sqrt{2}-57|}-\sqrt{40\sqrt{2}+57}$; тогда $A<0$, так как первый радикал меньше второго.

Возведём обе части в квадрат:

$$A^2 = 57-40\sqrt{2}+57+40\sqrt{2}-2\sqrt{\left(57-40\sqrt{2}\right)\cdot\left(57+40\sqrt{2}\right)} \iff$$

$$\iff A^2 = 114-2\sqrt{57^2-1600\cdot 2} \iff A^2=100 \iff A=\pm 10.$$

Значит, $A=-10$.

О т в е т. -10.

Задачи

1. (ЕГЭ) Найти значение выражения $\left(\dfrac{a}{\sqrt{a^2+ab}}-\dfrac{\sqrt{a}}{\sqrt{a+b}}\right):\sqrt{\dfrac{a}{a+b}}$ при $a=4,\ b=5$.

2. (ЕГЭ) Найти значение выражения $\dfrac{2}{\sqrt{p}-\sqrt{q}}-\dfrac{2\sqrt{p}}{p-q}$ при $p=8,\ q=9$.

3. (ЕГЭ) Сократить дробь $\dfrac{a-81b}{\sqrt{a}-9\sqrt{b}}$.

4. (ЕГЭ) Сократить дробь $\dfrac{a+27b}{\sqrt[3]{a}+3\sqrt[3]{b}}$.

5. (Геол-93.1) Найти численное значение выражения $\left(\dfrac{8a\sqrt{a}+b\sqrt{b}}{4\sqrt{a}+2\sqrt{b}}-\sqrt{ab}\right)\cdot\left(\dfrac{4\sqrt{a}+2\sqrt{b}}{4a-b}\right)^2$.

6. (Почв-98(1).1) Упростить выражение $\left(\dfrac{\sqrt{2a}-\sqrt{b}}{\sqrt{2a}+\sqrt{b}}-\dfrac{\sqrt{2a}+\sqrt{b}}{\sqrt{2a}-\sqrt{b}}\right)\cdot\left(\sqrt{\dfrac{b}{4a}}-\sqrt{\dfrac{a}{b}}\right)$.

7. (Псих-84.1) Вычислить, не используя калькулятор $\left(\dfrac{3(\frac{17}{90}-0,125:1\frac{1}{8}):480}{(7:1,8-2\frac{1}{3}:1,5):2\frac{2}{3}}\right)^{-1}:\left(\dfrac{679\cdot 10^{-2}}{0,7}+0,3\right)$.

8. (ЕГЭ) Вычислить $\sqrt{4+2\sqrt{3}}-\sqrt{4-2\sqrt{3}}$.

9. (ЕГЭ) Выражение $\sqrt{3-\sqrt{8}}-\sqrt{2}$ является целым числом. Найти его.

10. (Почв-96.1) Доказать, что число $\left(\left(\sqrt[4]{3}-\sqrt[4]{27}\right)^2+7\right)\cdot\left(\left(\sqrt[4]{3}+\sqrt[4]{27}\right)^2-7\right)$ целое, и найти его.

11. (ЕГЭ) Упростите до целого числа выражение $\sqrt[3]{10+6\sqrt{3}}-\sqrt{3}$.

12. (МГУ-48.3) Выражение $\sqrt[3]{5\sqrt{2}+7}-\sqrt[3]{5\sqrt{2}-7}$ является целым числом. Найти это целое число.

13. (МГУ-48.2) Выражение $\sqrt[3]{20+14\sqrt{2}}+\sqrt[3]{20-14\sqrt{2}}$ является целым числом. Найти это целое число.

14. (ИСАА-99.2) Упростив выражение
$A=\dfrac{3ab-b\sqrt{ab}+a\sqrt{ab}-3b^2}{\sqrt{2^{-2}\left(ab^{-1}+a^{-1}b\right)-0,5}}-2ab-6a^{\frac{1}{2}}b^{\frac{3}{2}}$, где $a>b>0$ – действительные числа, выяснить, что больше: A или $0,01$?

1.2. Сравнение чисел

Теоретический материал

В этом разделе собраны простейшие задачи на сравнение чисел. В большинстве случаев достаточно сгруппировать подходящим образом слагаемые и возвести обе части неравенства в нужную степень. При этом в чётную степень можно возводить только неотрицательные величины.

Примеры решения задач

Пример 1. (У) Доказать, что $\sqrt{2}+\sqrt{3}<\sqrt{10}$.

Решение. Для того чтобы избавиться от квадратных корней, будем возводить в квадрат. Так как обе части исходного неравенства неотрицательны, то можем возвести их в квадрат:

$$5+2\sqrt{6}<10 \quad\Longleftrightarrow\quad 2\sqrt{6}<5.$$

Возведя обе части последнего неравенства в квадрат, получим очевидное неравенство $24<25$. Следовательно, исходное неравенство также справедливо.

Пример 2. (У) Выяснить, что больше: $\sqrt[3]{3}$ или $\sqrt[5]{5}$?

Решение. Составим формальное неравенство

$$\sqrt[3]{3}\ \vee\ \sqrt[5]{5}$$

и будем сводить его к очевидному неравенству с помощью алгебраических преобразований. Для того чтобы избавиться от радикалов, надо возвести обе части неравенства в пятнадцатую степень:

$$\begin{array}{ccc}\left(\sqrt[3]{3}\right)^{15} & \bigvee & \left(\sqrt[5]{5}\right)^{15}\\ 3^5 & \vee & 5^3\\ 243 & > & 125.\end{array}$$

Поскольку не было преобразований, меняющих знак неравенства, полученный знак соответствует исходному, то есть $\sqrt[3]{3}>\sqrt[5]{5}$.

Ответ. $\sqrt[3]{3}>\sqrt[5]{5}$.

П р и м е р 3. (Экон-88.1) Какое из двух чисел больше: $\sqrt[3]{4}+\sqrt{2}$ или 3?

Р е ш е н и е. Составим формальное неравенство

$$\sqrt[3]{4}+\sqrt{2} \ \vee \ 3$$

и будем работать с ним как с обычным, исключив преобразования, меняющие его знак. Возведём обе части неравенства $\sqrt[3]{4} \ \vee \ 3-\sqrt{2}$ в куб:

$$\begin{array}{rcl} 4 & \vee & (3-\sqrt{2})^3 = 45-29\sqrt{2} \\ 29\sqrt{2} & \vee & 41. \end{array}$$

Теперь возведём обе части неравенства в квадрат и получим $1682 > 1681$; так как не было преобразований, меняющих знак неравенства, полученный знак соответствует исходному, то есть $\sqrt[3]{4}+\sqrt{2} > 3$.

О т в е т. Первое число больше.

Задачи

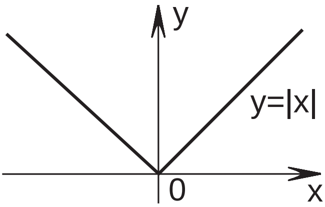
1. (ВМК-92.1) Какое из двух чисел $\sqrt[3]{\dfrac{1990}{1991}}$ или $\sqrt[3]{\dfrac{1991}{1992}}$ больше?
2. (Геол-94(1).1) Какое из двух чисел меньше: $\sqrt[3]{47}$ или $\sqrt{13}$?
3. (Геол-82.1) Какое из следующих чисел больше: $\sqrt{\operatorname{ctg}\dfrac{\pi}{4}-2\sin\dfrac{3\pi}{2}}$ или $\sqrt[3]{5}$?
4. (У) Сравнить числа: 3^{400} и 4^{300}.
5. (У) Сравнить числа: $\sqrt{7}+\sqrt{10}$ и $\sqrt{3}+\sqrt{19}$.
6. (ЕГЭ) Сравнить $\sqrt{2004}+\sqrt{2007}$ и $\sqrt{2005}+\sqrt{2006}$.
7. (У) Сравнить числа: $\sqrt[3]{38+17\sqrt{5}}$ и $\sqrt{9+4\sqrt{5}}+\dfrac{11}{1000}$.
8. (У) Выяснить, что больше: 33^{44} или 44^{33}?
9. (У) Сравнить числа: π и $\sqrt{10}$.
10. (У) Сравнить числа: $\left(\dfrac{1}{6}\right)^{1/6}$ и $\left(\dfrac{1}{5}\right)^{1/5}$.

1.3. Модуль числа и алгебраического выражения, уравнения и неравенства с модулем

Теоретический материал

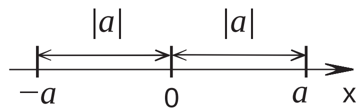
Определим *модуль* (абсолютную величину) вещественного числа x следующим образом:

$$|x| = \begin{cases} x, & \text{если} \quad x \geq 0, \\ -x, & \text{если} \quad x < 0. \end{cases}$$



Функция $y = |x|$ является чётной и неотрицательной на всей числовой оси.

Геометрическим смыслом модуля числа считается расстояние по числовой оси от начала отсчёта до рассматриваемого числа, причём одному и тому же значению $|a|$ соответствуют две симметричные относительно начала отсчёта точки: a и $-a$ соответственно.



Для преобразований выражений с модулями, а также для решения уравнений и неравенств, содержащих функции неизвестных величин под знаком модуля, рассматривают варианты раскрытия модулей в зависимости от знака подмодульного выражения. Например:

$$|f(x)| = g(x) \iff \left[\begin{array}{l} \begin{cases} f(x) = g(x), \\ f(x) \geq 0; \end{cases} \\ \begin{cases} -f(x) = g(x), \\ f(x) < 0; \end{cases} \end{array}\right. \tag{8}$$

$$|f(x)| > g(x) \iff \left[\begin{array}{l} \begin{cases} f(x) > g(x), \\ f(x) \geq 0; \end{cases} \\ \begin{cases} -f(x) > g(x), \\ f(x) < 0; \end{cases} \end{array}\right. \tag{9}$$

$$|f(x)| < g(x) \iff \left[\begin{array}{l} \begin{cases} f(x) < g(x), \\ f(x) \geq 0; \end{cases} \\ \begin{cases} -f(x) < g(x), \\ f(x) < 0. \end{cases} \end{array}\right. \tag{10}$$

В случае нестрогих неравенств с модулем неравенства равносильных систем также становятся нестрогими. Кроме того, принципиальной разницы в приписывании случая $f(x) = 0$ к любой из получаемых систем (или даже к обеим сразу) нет.

Иногда бывает удобно раскрывать модули через геометрический смысл. Например, при положительном a

$$|f(x)| = a \iff f(x) = \pm a; \tag{11}$$

$$|f(x)| < a \iff -a < f(x) < a; \tag{12}$$

$$|f(x)| > a \iff \left[\begin{array}{l} f(x) > a; \\ f(x) < -a. \end{array}\right. \tag{13}$$

Примеры решения задач

Пример 1. (Физ-95.3) Решить уравнение $2|x+1| = 2 - x$.

Решение. Подмодульное выражение меняет знак в точке $x = -1$. Рассмотрим два случая.

1) При $x \geq -1$ исходное уравнение примет вид

$$2(x+1) = 2 - x \quad \Longleftrightarrow \quad x = 0.$$

Так как найденный корень удовлетворяет условию $x \geq -1$, то $x = 0$ является решением исходного уравнения.

2) При $x < -1$ уравнение запишется в виде

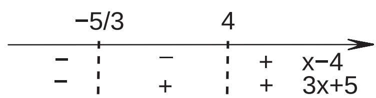
$$-2(x+1) = 2 - x \quad \Longleftrightarrow \quad x = -4.$$

Найденный корень удовлетворяет условию $x < -1$, следовательно, также является решением исходного уравнения.

Ответ. -4; 0.

Пример 2. (Экон-84.3) Решить неравенство $2|x-4| + |3x+5| \geq 16$.

Решение. Отметим нули подмодульных выражений на числовой прямой и проанализируем знаки подмодульных выражений.



1) При $x < -\dfrac{5}{3}$ оба подмодульных выражения отрицательны, следовательно,

$$\begin{cases} x < -\dfrac{5}{3}, \\ -2(x-4) - (3x+5) \geq 16; \end{cases} \quad \Longleftrightarrow \quad \begin{cases} x < -\dfrac{5}{3}, \\ x \leq -\dfrac{13}{5}; \end{cases} \quad \Longleftrightarrow \quad x \in \left(-\infty; -\dfrac{13}{5}\right].$$

2) При $-\dfrac{5}{3} \leq x < 4$ исходное неравенство примет вид

$$\begin{cases} -\dfrac{5}{3} \leq x < 4, \\ -2(x-4) + (3x+5) \geq 16; \end{cases} \quad \Longleftrightarrow \quad \begin{cases} -\dfrac{5}{3} \leq x < 4, \\ x \geq 3; \end{cases} \quad \Longleftrightarrow \quad x \in [3; 4).$$

3) При $x \geq 4$ получим

$$\begin{cases} x \geq 4, \\ 2(x-4) + (3x+5) \geq 16; \end{cases} \quad \Longleftrightarrow \quad \begin{cases} x \geq 4, \\ x \geq \dfrac{19}{5}; \end{cases} \quad \Longleftrightarrow \quad x \in [4; +\infty).$$

Объединив все три полученных промежутка, получим ответ.

Ответ. $\left(-\infty; -\dfrac{13}{5}\right] \bigcup [3; +\infty)$.

П р и м е р 3. (Экон-89.3) Решить уравнение $||3-x|-x+1|+x=6$.

Р е ш е н и е. Перепишем уравнение в виде $||x-3|-x+1|=6-x$ и будем раскрывать модули, начиная с внутреннего.

Первый случай:

$$\begin{cases} x \geq 3, \\ |x-3-x+1| = 6-x; \end{cases} \iff \begin{cases} x \geq 3, \\ 2 = 6-x; \end{cases} \iff x=4.$$

Второй случай:

$$\begin{cases} x < 3, \\ |3-x-x+1| = 6-x; \end{cases} \iff \begin{cases} x < 3, \\ |2x-4| = 6-x. \end{cases}$$

Так как при $x<3$ всегда $6-x>0$, то дальше удобнее раскрывать модуль через геометрический смысл:

$$\begin{cases} x < 3, \\ \left[\begin{array}{l} 2x-4 = 6-x; \\ 2x-4 = x-6; \end{array} \right. \end{cases} \iff \begin{cases} x < 3, \\ \left[\begin{array}{l} x = \dfrac{10}{3}; \\ x = -2; \end{array} \right. \end{cases} \iff x=-2.$$

О т в е т. -2; 4.

Задачи

1. (Хим-00.1) Решить уравнение $|x|=2-x$.
2. (Геол.ОГ-79.1) Решить уравнение $|2x-3|=3-2x$.
3. (Геогр-77.1) Решить неравенство $2|x+1|>x+4$.
4. (Геогр-96(1).1) Решить уравнение $|5x-3|-|7x-4|=2x-1$.
5. (Биол-95.2) Решить уравнение $|x-1|+|2x-3|=2$.
6. (Геогр-00.2) Решить уравнение $|2x+8|-|x-5|=12$.
7. (Псих-95.1) Решить уравнение $|2x-15|=22-|2x+7|$.
8. (Псих-98.1) Решить уравнение $|4x-|x-2|+3|=16$.
9. (Геогр-97.1.) Решить неравенство $\dfrac{|x-1|+10}{4|x-1|+3}>2$.
10. (Хим-96(1).3) Решить неравенство $|x+|1-x||>3$.
11. (Геол-91.6) При всех значениях параметра a решить уравнение
    а) $|x+2|+a|x-4|=6$, б) $|x+3|-a|x-1|=4$.
12. (Физ-84.4) Найти все значения параметра a, при которых все решения уравнения $2|x-a|+a-4+x=0$ принадлежат отрезку $[0;4]$.

1.4. Квадратный трёхчлен, разложение квадратного трёхчлена на множители, квадратные уравнения и неравенства, теорема Виета

Теоретический материал

Квадратным трёхчленом называется выражение вида

$$f(x) = ax^2 + bx + c,$$

где a, b, c – коэффициенты (постоянные числа), $a \neq 0$, x – переменная. Если $a = 1$, то квадратный трёхчлен называется приведённым.

Уравнение $ax^2 + bx + c = 0$ называется *квадратным уравнением.*

Число $x_0 \in \mathbb{R}$ называется действительным *корнем квадратного трёхчлена*, если $f(x_0) = 0$. Соответственно, это же значение x_0 обращает квадратное уравнение в верное равенство, то есть является корнем квадратного уравнения.

Число $D = b^2 - 4ac$ называется *дискриминантом* квадратного трёхчлена $ax^2 + bx + c$.

По значению дискриминанта можно определить количество корней: если

- $D < 0$, то квадратный трёхчлен не имеет действительных корней;
- $D = 0$, то квадратный трёхчлен имеет единственный корень $x_0 = -\dfrac{b}{2a}$ (иногда говорят о наличии двух совпадающих корней);
- $D > 0$, то квадратный трёхчлен имеет два корня, вычисляемые по формулам: $x_1 = \dfrac{-b-\sqrt{D}}{2a}$, $x_2 = \dfrac{-b+\sqrt{D}}{2a}$.

З а м е ч а н и е. В случае $b = 2p$, $p \in \mathbb{R}$, формулы корней можно упростить, используя понятие чётного дискриминанта: $D_1 = p^2 - ac$. Тогда формулы для корней принимают вид

$$x_1 = \frac{-p-\sqrt{D_1}}{a}, \quad x_2 = \frac{-p+\sqrt{D_1}}{a}.$$

Разложение на линейные множители. Если дискриминант квадратного трёхчлена $ax^2 + bx + c$ положителен, то справедливо разложение

$$ax^2 + bx + c = a(x - x_1)(x - x_2),$$

где x_1 и x_2 – корни квадратного трёхчлена.

З а м е ч а н и е. В случае нулевого дискриминанта квадратный трёхчлен преобразуется к виду $a(x - x_0)^2$, где $x_0 = -\dfrac{b}{2a}$ – его корень.

Используя формулы корней квадратного трёхчлена (в случае неотрицательного дискриминанта, то есть при их наличии), можно установить связь между корнями и коэффициентами, которая нередко позволяет избежать непосредственного вычисления самих корней.

Теорема Виета. Если квадратное уравнение $ax^2+bx+c=0$ имеет два корня x_1 и x_2 (может быть, совпадающих), то для них выполнены соотношения

$$\begin{cases} x_1+x_2=-\dfrac{b}{a}, \\ x_1x_2=\dfrac{c}{a}. \end{cases} \tag{14}$$

Обратная теорема Виета. Если числа x_1 и x_2 являются решениями системы

$$\begin{cases} x_1+x_2=-p, \\ x_1x_2=q, \end{cases} \tag{15}$$

то они же являются корнями приведённого квадратного трёхчлена x^2+px+q.

Применяя формулы сокращённого умножения и соотношения из теоремы Виета, можно получить полезные выражения для вычисления различных комбинаций корней квадратного уравнения без непосредственного вычисления самих корней. Например:

$$x_1^2+x_2^2=(x_1+x_2)^2-2x_1x_2=\frac{b^2}{a^2}-2\frac{c}{a}; \tag{16}$$

$$x_1^3+x_2^3=(x_1+x_2)\left((x_1+x_2)^2-3x_1x_2\right)=-\frac{b}{a}\left(\frac{b^2}{a^2}-3\frac{c}{a}\right); \tag{17}$$

$$x_1^4+x_2^4=\left((x_1+x_2)^2-2x_1x_2\right)^2-2(x_1x_2)^2=\left(\frac{b^2}{a^2}-2\frac{c}{a}\right)^2-2\frac{c^2}{a^2}. \tag{18}$$

Подобным образом можно выразить и многие другие комбинации корней через коэффициенты квадратного уравнения.

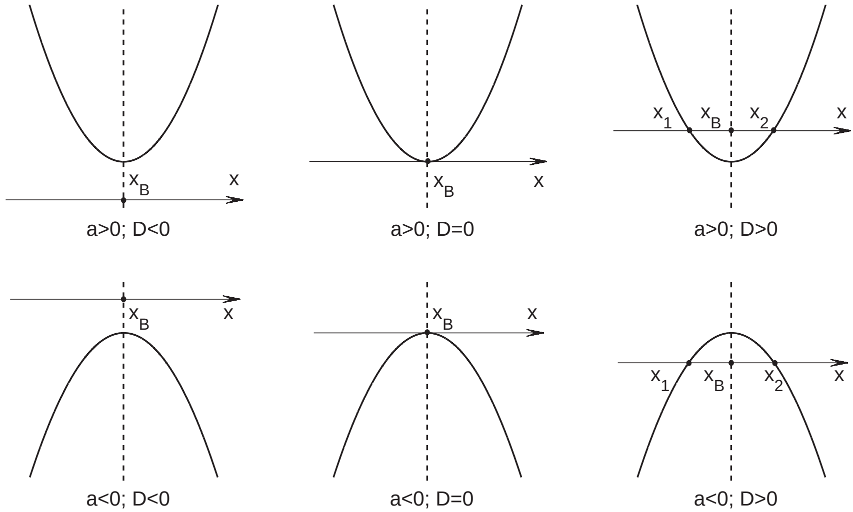
График квадратичной функции. Функция вида $f(x)=ax^2+bx+c$, где $a\neq 0$, называется *квадратичной функцией*. В силу представления

$$f(x)=ax^2+bx+c=a\left(x+\frac{b}{2a}\right)^2-\frac{D}{4a},$$

где $D=b^2-4ac$, можно говорить о том, что график квадратичной функции получается из графика степенной функции $y=x^2$ последовательными элементарными преобразованиями:

$$y=x^2\ \to\ \left(x+\frac{b}{2a}\right)^2\ \to\ a\left(x+\frac{b}{2a}\right)^2\ \to\ a\left(x+\frac{b}{2a}\right)^2-\frac{D}{4a}=f(x);$$

то есть графиком квадратичной функции $f(x)$ является парабола с вершиной $(x_{\text{в}};y_{\text{в}})$, где $x_{\text{в}}=-\dfrac{b}{2a}$, $y_{\text{в}}=-\dfrac{D}{4a}$. Вертикальная прямая $x=-\dfrac{b}{2a}$ задаёт её ось симметрии.



Ветви параболы направлены вверх при $a > 0$ и вниз при $a < 0$.

Пересечение параболы с осью абсцисс обусловливается наличием корней у квадратного трёхчлена, то есть знаком его дискриминанта.

З а м е ч а н и е. Опираясь на знание расположения параболы на координатной плоскости, можно решать квадратные неравенства, избегая промежуточных преобразований. Например, для $f(x) = ax^2 + bx + c$ при $D = b^2 - 4ac > 0$ и $a > 0$:

- $f(x) > 0$ при $x < x_1$ или $x > x_2$;
- $f(x) < 0$ при $x_1 < x < x_2$;

где x_1 и x_2 – корни трёхчлена.

Примеры решения задач

П р и м е р 1. (Геогр-80.1) Найти все значения параметра k, при которых уравнение $x^2 - 2kx + k^2 + 2k - 1 = 0$ имеет два различных решения.

Р е ш е н и е. Рассмотрим уравнение как квадратное относительно x и вычислим его дискриминант:

$$x^2 - 2kx + k^2 + 2k - 1 = 0, \quad D_1 = k^2 - (k^2 + 2k - 1) = 1 - 2k.$$

Два различных решения у квадратного уравнения будут лишь при положительном дискриминанте: $1 - 2k > 0$, откуда $k < \dfrac{1}{2}$.

О т в е т. $\left(-\infty; \dfrac{1}{2}\right)$.

П р и м е р 2. (Экон.М-00.1) Решить уравнение $3|x+1|+x^2+4x-3=0$.

Р е ш е н и е. Подмодульное выражение меняет знак в точке $x=-1$.

Первый случай:

$$\begin{cases} x\ge -1, \\ 3(x+1)+x^2+4x-3=0; \end{cases} \iff \begin{cases} x\ge -1, \\ x^2+7x=0; \end{cases} \iff x=0.$$

Второй случай:

$$\begin{cases} x< -1, \\ -3(x+1)+x^2+4x-3=0; \end{cases} \iff \begin{cases} x< -1, \\ x^2+x-6=0; \end{cases} \iff x=-3.$$

О т в е т. -3; 0.

П р и м е р 3. (У) Пусть x_1 и x_2 – корни уравнения $3x^2-5x-4=0$. Найти $x_1^3x_2+x_1x_2^3$.

Р е ш е н и е. Дискриминант данного квадратного уравнения $D=73$; следовательно, корни иррациональны, и непосредственное вычисление выражения $x_1^3x_2+x_1x_2^3$ будет громоздким. В этом случае удобнее выразить искомую комбинацию корней через коэффициенты квадратного уравнения, используя теорему Виета.

В искомом выражении вынесем общий множитель за скобку и воспользуемся формулами (14) и (16):

$$x_1^3x_2+x_1x_2^3=x_1x_2(x_1^2+x_2^2)=\frac{c}{a}\cdot\left(\frac{b^2}{a^2}-2\frac{c}{a}\right).$$

Подставив $a=3$, $b=-5$, $c=-4$, получим $-196/27$.

О т в е т. $-196/27$.

Задачи

1. (Физ-83.2) Решить уравнение $|5x^2-3|=2$.
2. (Соц-00.1) Решить уравнение $|x^2-3x|=2x-4$.
3. (Геол-81.1) Решить уравнение $x^2-4x+|x-3|+3=0$.
4. (Биол-96.2) Решить уравнение $(x-7)^2-|x-7|=30$.
5. (Геол-95.2) Решить неравенство $x^2-6\ge|x|$.
6. (Геол-77.2) Решить неравенство $x^2-|5x-3|-x<2$.
7. (Хим-95.1) Решить неравенство $\dfrac{3x}{x^2+2}\ge 1$.
8. (ВМК-87.2) Существуют ли действительные значения a, для которых $a^2-4a+\sqrt{3}=-a\sqrt{2}$? Если да, то сколько их?

9. (Почв-96.2) Решить неравенство $3x^4 + 4 < 13x^2$.

10. (Геол-98.2) Решить уравнение $||4 - x^2| - x^2| = 1$.

11. (Филол-98.1) Решить неравенство $\dfrac{x^2 + 4x + 3}{|1 + x|} \leq 0$.

12. (Экон.К-83.1) Решить уравнение $x^2 + 11 + \sqrt{x^2 + 11} = 42$.

13. (У) Решить уравнение $x^2 + px + 35 = 0$ при условии, что сумма квадратов корней равна 74.

14. (У) Пусть x_1, x_2 – корни квадратного уравнения $x^2 + px - q = 0$. Найти $x_1^4 + x_2^4$, не вычисляя этих корней.

15. (Геогр-92.2) Найти три числа a, b и c, если известно, что их сумма равна 2, а квадратное уравнение $ax^2 + bx + c = 0$ имеет единственное решение $x = 2$.

16. (ВМК-80.4) Найти все значения параметра a, при каждом из которых уравнение $(3a - 1)x^2 + 2ax + 3a - 2 = 0$ имеет два различных корня.

2. Рациональные и иррациональные уравнения и неравенства, простейшие системы уравнений

2.1. Рациональные уравнения и неравенства, метод интервалов

Теоретический материал

Неравенство называется *рациональным*, если левая и правая его части есть суммы отношений многочленов. При решении рациональных неравенств удобно применять метод интервалов. Для этого неравенство приводится к виду

$$\frac{(x - x_1)^{p_1}(x - x_2)^{p_2}\ldots(x - x_k)^{p_k}}{(x - x_{k+1})^{p_{k+1}}(x - x_{k+2})^{p_{k+2}}\ldots(x - x_n)^{p_n}} \geq 0,$$

где p_m – кратность корня x_m.

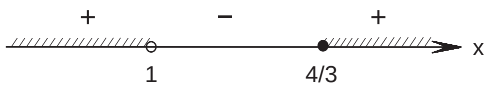
При этом полезно следовать следующему правилу: *при старшей степени в уравнениях и неравенствах должен быть знак плюс*, то есть каждая разность должна иметь вид $(x - x_m)$, а не $(x_m - x)$. Затем рисуется числовая ось, на ней расставляются все корни x_k, при этом точки, стоящие в знаменателе, выкалываются, а точки, стоящие в числителе, выкалываются, если неравенство строгое. После этого находятся знаки левой части на получившихся интервалах: они чередуются с учётом кратности каждого корня. Для наглядности можно рисовать змейку: начинаем справа сверху, переходим через ось, если кратность корня нечётная, и остаёмся на той же стороне, если кратность корня чётная.

Примеры решения задач

Пример 1. (Геол-87.3) Решить неравенство $\dfrac{1}{1-x} \geq -3$.

Решение. Перенесём всё в одну сторону и приведём к общему знаменателю:

$$\frac{1}{1-x} + 3 \geq 0 \quad \Longleftrightarrow \quad \frac{1+3(1-x)}{1-x} \geq 0 \quad \Longleftrightarrow \quad \frac{4-3x}{1-x} \geq 0 \quad \Longleftrightarrow \quad \frac{3x-4}{x-1} \geq 0;$$



значит, $x < 1$ или $x \geq \dfrac{4}{3}$.

Ответ. $(-\infty; 1) \bigcup \left[\dfrac{4}{3}; \infty\right)$.

Пример 2. (Биол-84.1) Решить неравенство $\dfrac{x}{1-x} < x - 6$.

Решение. Перенесём всё в одну сторону и приведём к общему знаменателю:

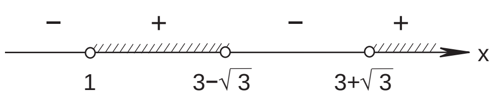
$$\frac{x}{1-x} - x + 6 < 0 \quad \Longleftrightarrow \quad \frac{x + (6-x)(1-x)}{1-x} < 0 \quad \Longleftrightarrow$$

$$\Longleftrightarrow \quad \frac{x + 6 - x + x^2 - 6x}{1-x} < 0 \quad \Longleftrightarrow \quad \frac{x^2 - 6x + 6}{x-1} > 0.$$

Найдём нули числителя:

$$x^2 - 6x + 6 = 0 \quad \Longleftrightarrow \quad x = 3 \pm \sqrt{3}.$$

Проставим знаки дроби на числовой оси:



значит, $1 < x < 3 - \sqrt{3}$ или $x > 3 + \sqrt{3}$.

Ответ. $(1; 3 - \sqrt{3}) \cup (3 + \sqrt{3}; +\infty)$.

Пример 3. (ИСАА-92.3) Решить неравенство $\dfrac{|x-5|-1}{2|x-6|-4} \leq 1$.

Решение. Подмодульные выражения меняют знаки в точках $x = 5$ и $x = 6$.

1) При $x < 5$ исходное неравенство запишется в виде

$$\frac{5-x-1}{2(6-x)-4} \leq 1 \quad \Longleftrightarrow \quad \frac{4-x}{2(4-x)} \leq 1 \quad \Longleftrightarrow \quad \begin{cases} \dfrac{1}{2} \leq 1, \\ x \neq 4. \end{cases}$$

Следовательно, в этом случае $x \in (-\infty; 4) \cup (4; 5)$.

2) При $5 \le x < 6$ получим

$$\frac{x-5-1}{2(6-x)-4} \le 1 \iff \frac{x-6}{8-2x} \le 1 \iff \frac{x-6-8+2x}{8-2x} \le 0 \iff \frac{3x-14}{x-4} \ge 0.$$

Это неравенство выполняется $\forall x \in [5, 6)$.

3) При $x \ge 6$ неравенство примет вид

$$\frac{x-5-1}{2(x-6)-4} \le 1 \iff \frac{x-6}{2x-16} \le 1 \iff \frac{x-6-2x+16}{x-8} \le 0 \iff \frac{x-10}{x-8} \ge 0,$$

откуда, с учётом условия $x \ge 6$, получим $x \in [6; 8) \cup [10; +\infty)$.

Объединив все результаты, получим ответ.

О т в е т. $(-\infty; 4) \bigcup (4; 8) \bigcup [10; +\infty)$.

Задачи

1. (ЕГЭ) Решить неравенство $\dfrac{(x-2)(4x+3)}{x+4} \ge 0$.
2. (ЕГЭ) Решить неравенство $\dfrac{2}{x} - 10 \ge 0$.
3. (ЕГЭ) Решить неравенство $\dfrac{3x^2+3x}{x-5} \le 0$.
4. (М/м-77.1) Решить неравенство $x \le 3 - \dfrac{1}{x-1}$.
5. (Псих-82.1) Решить неравенство $\dfrac{2x-3}{4-x} > \dfrac{1}{x}$.
6. (Почв-00(1).1) Решить неравенство $\dfrac{1}{3-2x} \le 1$.
7. (Геогр-00(1).1) Решить неравенство $x \le \dfrac{8x-2}{x+5}$.
8. (ИСАА-00.1) Решить неравенство $|2x-1| > \dfrac{1}{x-2}$.
9. (Геол-82.2) Решить неравенство $\dfrac{2x+5}{|x+1|} \ge 1$.
10. (Биол-99.2) Решить неравенство $\dfrac{3}{|x-1|} \ge 2x+5$.
11. (Геол-96(1).1) Решить неравенство $\dfrac{1}{x-1996} \le \dfrac{x}{x-1996}$.
12. (Филол-99.2) Решить неравенство $\dfrac{1}{x^2+8x-9} \ge \dfrac{1}{3x^2-5x+2}$.

13. (Геол-98(1).1) Решить неравенство $(x^2+5x-6)|x+4|^{-1}<0$.

14. (ВМК-98.1) Решить неравенство $2x>\dfrac{5x+3}{|x+2|}$.

15. (М/м-85.2) Решить неравенство $\dfrac{1}{x+1}+\dfrac{2}{|x|-1}\geq\dfrac{2}{x-1}$.

16. (Геол-97.3) Решить неравенство $\dfrac{x}{20-\sqrt{x}}<10$.

17. (Физ-93.5) Решить неравенство $\dfrac{|x+3|+x}{x+2}>1$.

18. (Почв-00(1).1) Решить уравнение $\dfrac{x^{17}-1}{1-x^{15}}=\dfrac{1-x^{15}}{x^{13}-1}$.

19. (Соц-00.3) Решить неравенство $\dfrac{2}{x-1}+\dfrac{1}{x+2}>\dfrac{1}{2x+3}$.

20. (Экон-87.3) Решить неравенство $\dfrac{|2-x|-x}{|x-3|-1}\leq 2$.

21. (Соц-99.5) Решить неравенство $\dfrac{4|2-x|}{4-|x|}-|x-2|\leq 0$.

22. (Физ-82.2) Найти все значения параметра a, при каждом из которых решение уравнения $10x-15a=13-5ax+2a$ больше 2.

23. (Геол-79.1) Для каждого значения параметра a найти все x, удовлетворяющие равенству $\dfrac{a}{2a-x}=3$.

2.2. Простейшие системы уравнений. Подстановка и исключение переменных при решении систем уравнений

Теоретический материал

В этом разделе собраны системы уравнений, решаемые стандартными приёмами: почленное сложение и вычитание уравнений, умножение и деление уравнений, подстановка и замена переменных.

Примеры решения задач

Пример 1. (Биол-94.1) Решить систему уравнений $\begin{cases} x+2y=6, \\ 3x^2-xy+4y^2=48. \end{cases}$

Решение. Выразим x из первого уравнения и подставим во второе:

$$\begin{cases} x=6-2y, \\ 3(6-2y)^2-(6-2y)y+4y^2=48. \end{cases}$$

Теперь рассмотрим отдельно второе уравнение:

$$3\cdot 36+12y^2-72y-6y+2y^2+4y^2=48 \quad\Longleftrightarrow\quad 3y^2-13y+10=0,$$

откуда $y=1$ или $y=\dfrac{10}{3}$.

При $y=1$ имеем $x=6-2y=4$; при $y=\dfrac{10}{3}$ имеем $x=6-2y=-\dfrac{2}{3}$.

Ответ. $\left(-\dfrac{2}{3};\dfrac{10}{3}\right)$, $(4;1)$.

Пример 2. (Филол-88.2) Решить систему уравнений $\begin{cases}3|x+1|+2|y-2|=20,\\ x+2y=4.\end{cases}$

Решение. Перепишем систему в виде

$$\begin{cases}3|x+1|+|2y-4|=20,\\ 2y-4=-x.\end{cases}$$

Подставим выражение для $2y-4$ из второго уравнения в первое, получим уравнение с одной неизвестной $3|x+1|+|x|=20$. Раскроем модули по определению:

$$\left[\begin{array}{l}\begin{cases}x<-1,\\ -3(x+1)-x=20;\end{cases}\\ \begin{cases}-1\le x<0,\\ 3(x+1)-x=20;\end{cases}\\ \begin{cases}x\ge 0,\\ 3(x+1)+x=20;\end{cases}\end{array}\right. \Longleftrightarrow \left[\begin{array}{l}\begin{cases}x<-1,\\ x=-\dfrac{23}{4};\end{cases}\\ \begin{cases}-1\le x<0,\\ x=\dfrac{17}{2};\end{cases}\\ \begin{cases}x\ge 0,\\ x=\dfrac{17}{4};\end{cases}\end{array}\right. \Longleftrightarrow \left[\begin{array}{l}x=-\dfrac{23}{4};\\ x=\dfrac{17}{4}.\end{array}\right.$$

Подставив полученные значения x во второе уравнение исходной системы, найдём значения y. При $x=-\dfrac{23}{4}$ получим $y=\dfrac{39}{8}$, при $x=\dfrac{17}{4}$ получим $y=-\dfrac{1}{8}$.

Ответ. $\left(-\dfrac{23}{4};\dfrac{39}{8}\right)$, $\left(\dfrac{17}{4};-\dfrac{1}{8}\right)$.

Замечание. Нередко более рациональным оказывается решение, в котором подставляется не явный вид одной из переменных, а некоторое выражение, однозначно его заменяющее или восстанавливающее.

Пример 3. (Физ-77.2) Найти все значения параметра a, при которых числа x и y, удовлетворяющие системе уравнений $\begin{cases}x+y=a,\\ 2x-y=3;\end{cases}$ подчиняются также неравенству $x>y$.

Р е ш е н и е. Выразим обе переменные через параметр. Для этого сначала почленно сложим уравнения, а затем из удвоенного первого уравнения почленно вычтем второе уравнение:

$$\begin{cases} 3x = a + 3, \\ 3y = 2a - 3. \end{cases}$$

Требуемое неравенство $x > y$ эквивалентно неравенству $3x > 3y$. Подставляя в это неравенство найденные $3x$ и $3y$, получаем

$$a + 3 > 2a - 3 \quad \Longleftrightarrow \quad a < 6.$$

Следовательно, при $a < 6$ решения системы подчиняются условию $x > y$.

О т в е т. $(-\infty; 6)$.

Задачи

1. (Псих-80.2) Решить систему уравнений $\begin{cases} 2u + v = 7, \\ |u - v| = 2. \end{cases}$

2. (ВМК-87.1) Решить систему уравнений $\begin{cases} \sqrt{x} + 3y = 9, \\ x - 1 = y(\sqrt{x} + 1). \end{cases}$

3. (М/м-79.3) Решить систему уравнений $\begin{cases} \dfrac{2}{2x - y} + \dfrac{3}{x - 2y} = \dfrac{1}{2}, \\ \dfrac{2}{2x - y} - \dfrac{1}{x - 2y} = \dfrac{1}{18}. \end{cases}$

4. (Псих-94.2) Известно, что $x = 1$, $y = -1$ – одно из решений системы $\begin{cases} 2ax + by = 1, \\ ax^2 + by^2 = 2; \end{cases}$ найти все её решения.

5. (Физ-81.2) Найти все значения параметра a, при каждом из которых система уравнений $\begin{cases} x^2 + y^2 = 1, \\ x + y = a \end{cases}$ имеет единственное решение.

6. (Почв-70.2) При каких значениях параметра α система уравнений $\begin{cases} \alpha x - 4y = \alpha + 1, \\ 2x + (\alpha + 6)y = \alpha + 3 \end{cases}$ не имеет решений?

7. (Экон-78.3) Найти все значения параметра, при которых система $\begin{cases} bx + 2y = b + 2, \\ 2bx + (b + 1)y = 2b + 4 \end{cases}$ имеет хотя бы одно решение.

8. (Филол-00.5) Найти все значения a, при каждом из которых уравнения $(2a - 1)x^2 + 6ax + 1 = 0$ и $ax^2 - x + 1 = 0$ имеют общий корень.

2.3. Радикалы. Иррациональные уравнения и неравенства, равносильные преобразования

Теоретический материал

Уравнения и неравенства с радикалами. Общей идеей при решении уравнений и неравенств с радикалами (корнями различной степени) является избавление от соответствующих корней, для чего применяется возведение в степень, соответствующую показателю корня. Однако в ряде случаев подобное действие приводит к приобретению посторонних решений, вследствие чего рекомендуется использовать равносильные преобразования на всех этапах решения задачи с учётом возникающих дополнительных условий. Кроме того, иногда полезно перед возведением в степень преобразовать решаемое соотношение к виду, наиболее близкому к простейшему.

Простейшие уравнения и неравенства с квадратным корнем. Методы решения простейших уравнений и неравенств с квадратным корнем хорошо алгоритмизированы и основаны на следующих равносильных переходах:

$$\sqrt{f(x)} = g(x) \iff \begin{cases} f(x) = g^2(x), \\ g(x) \geq 0; \end{cases} \tag{19}$$

следует заметить, что неравенство $f(x) \geq 0$, задающее область существования радикала, в приведённой системе выполняется автоматически (подобное касается и других типов задач);

$$\sqrt{f(x)} > g(x) \iff \left[\begin{array}{l} \begin{cases} f(x) > g^2(x), \\ g(x) \geq 0; \end{cases} \\ \begin{cases} f(x) \geq 0, \\ g(x) < 0; \end{cases} \end{array} \right. \tag{20}$$

$$\sqrt{f(x)} < g(x) \iff \begin{cases} f(x) < g^2(x), \\ f(x) \geq 0, \\ g(x) \geq 0; \end{cases} \tag{21}$$

заметим, что в последнем равносильном переходе вместо условия $g(x) \geq 0$ можно использовать условие $g(x) > 0$, поскольку исходное неравенство не имеет решений при $g(x) = 0$. Однако, нет необходимости над этим задумываться, так как при возведении неравенства в квадрат, главное, чтобы обе части неравенства были неотрицательными.

В случае нестрогих неравенств соответствующие знаки неравенств в равносильных системах становятся нестрогими:

$$\sqrt{f(x)} \geq g(x) \iff \left[\begin{array}{l} \begin{cases} f(x) \geq g^2(x), \\ g(x) \geq 0; \end{cases} \\ \begin{cases} f(x) \geq 0, \\ g(x) < 0; \end{cases} \end{array} \right. \tag{22}$$

$$\sqrt{f(x)} \le g(x) \quad \Longleftrightarrow \quad \begin{cases} f(x) \le g^2(x), \\ f(x) \ge 0, \\ g(x) \ge 0. \end{cases} \tag{23}$$

При отличном от простейшего типе задания, уравнение или неравенство решается последовательным приведением к простейшему виду. Для этого нередко приходится группировать радикалы, возводить обе части в соответствующие степени, при этом также нужно использовать только равносильные переходы.

Примеры решения задач

Пример 1. (Георг-93.3) Найти область определения функции $y = \sqrt{\dfrac{4x - x^2 - 4}{x^2 + x - 2}}$.

Решение. Область определения задается условием:

$$\frac{4x - x^2 - 4}{x^2 + x - 2} \ge 0 \Longleftrightarrow \frac{(x-2)^2}{(x+2)(x-1)} \le 0 \Longleftrightarrow \left[\begin{array}{l} x = 2; \\ (x+2)(x-1) < 0; \end{array}\right. \Longleftrightarrow \left[\begin{array}{l} x = 2; \\ -2 < x < 1. \end{array}\right.$$

Ответ. $(-2; 1) \cup \{2\}$.

Пример 2. (Соц-97.3) Решить уравнение $\sqrt{-3x + 3} = x - 1$.

Решение. Согласно (19) $\sqrt{-3x + 3} = x - 1 \quad \Longleftrightarrow$

$$\Longleftrightarrow \quad \begin{cases} -3x + 3 = (x-1)^2, \\ x - 1 \ge 0; \end{cases} \quad \Longleftrightarrow \quad \begin{cases} x^2 + x - 2 = 0, \\ x \ge 1; \end{cases} \quad \Longleftrightarrow \quad \begin{cases} \left[\begin{array}{l} x = 1; \\ x = -2; \end{array}\right. \\ x \ge 1. \end{cases}$$

Значит, $x = 1$.

Ответ. 1.

Пример 3. (Геол-84.2) Решить неравенство $\sqrt{2x^2 - 6x + 4} < x + 2$.

Решение. Согласно (21) $\sqrt{2x^2 - 6x + 4} < x + 2 \quad \Longleftrightarrow$

$$\Longleftrightarrow \quad \begin{cases} 2x^2 - 6x + 4 < (x+2)^2, \\ 2x^2 - 6x + 4 \ge 0, \\ x + 2 \ge 0; \end{cases} \quad \Longleftrightarrow \quad \begin{cases} x^2 - 10x < 0, \\ x^2 - 3x + 2 \ge 0, \\ x \ge -2; \end{cases} \quad \Longleftrightarrow$$

$$\Longleftrightarrow \quad \begin{cases} x \in (0; 10), \\ x \in (-\infty; 1] \cup [2; +\infty), \\ x \ge -2; \end{cases} \quad \Longleftrightarrow \quad x \in (0; 1] \cup [2; 10).$$

Ответ. $(0; 1] \cup [2; 10)$.

П р и м е р 4. (Биол-80.3) Решить неравенство $\sqrt{-x^2+6x-5} > 8-2x$.

Р е ш е н и е. Согласно (20)

$$\sqrt{-x^2+6x-5} > 8-2x \iff \left[\begin{array}{l} \begin{cases} -x^2+6x-5 > (8-2x)^2, \\ 8-2x \ge 0; \end{cases} \\ \begin{cases} -x^2+6x-5 \ge 0, \\ 8-2x < 0; \end{cases} \end{array}\right. \iff$$

$$\iff \left[\begin{array}{l} \begin{cases} 5x^2-38x+69 < 0, \\ x \le 4; \end{cases} \\ \begin{cases} x \in [1;5], \\ x > 4; \end{cases} \end{array}\right. \iff \left[\begin{array}{l} \begin{cases} x \in (3;23/5), \\ x \le 4; \end{cases} \\ x \in (4;5]; \end{array}\right. \iff x \in (3;5].$$

О т в е т. $(3;5]$.

П р и м е р 5. (Почв-98.1) Решить уравнение $\sqrt{x+1}-\sqrt{2x-1}=1$.

Р е ш е н и е. Перенесём второй радикал в правую часть:

$$\sqrt{x+1} = \sqrt{2x-1}+1.$$

Так как обе части уравнения неотрицательны, то можно возводить уравнение в квадрат. При этом условие $x+1 \ge 0$ писать нет необходимости, так как в получающемся уравнении $(x+1)$ равно квадрату положительной величины:

$$x+1 = (\sqrt{2x-1}+1)^2 \iff x+1 = 2x-1+1+2\sqrt{2x-1} \iff 2\sqrt{2x-1} = 1-x.$$

Полученное уравнение решаем стандартным способом:

$$\begin{cases} 4(2x-1) = 1+x^2-2x, \\ 1-x \ge 0; \end{cases} \iff \begin{cases} x^2-10x+5=0, \\ x \le 1. \end{cases}$$

Корень $x = 5-\sqrt{20}$ – подходит, а корень $x = 5+\sqrt{20}$ – нет.

О т в е т. $5-\sqrt{20}$.

Задачи

1. (Экон-89.1) Найти область определения функции $y = \dfrac{\sqrt{x^2-9}}{\sqrt{-x^2+x+20}}$.
2. (Геол-94.5) Решить неравенство $\sqrt{4z-3-z^2} \ne 0$.
3. (Экон-94.2) Найти область значений функции $y = -\sqrt{-3x^2+12x-3}$.
4. (ЕГЭ) Решить уравнение $\sqrt{4x^2-27} = -x$.
5. (Геол-96.1) Решить уравнение $\sqrt{3x-5} = x-11$.

6. (Геогр-00.1) Решить уравнение $\sqrt{3x+2} = 2x-4$.

7. (Соц-99.1) Решить уравнение $\sqrt{y-1} = 6-y$.

8. (Физ-98(1).2) Решить уравнение $\sqrt{3x-x^2-2} = 2x-3$.

9. (ВМК-91.1) Решить уравнение $\sqrt{x+4}+x-2=0$.

10. (Геол-95.1) Решить уравнение $\sqrt{5x-6}+x=4$.

11. (Хим-98(1).1) Решить уравнение $7-x=3\sqrt{5-x}$.

12. (Геогр-99.2) Решить уравнение $\sqrt{2x^2-8x+5} = x-2$.

13. (Биол-77.1) Решить уравнение $\sqrt{6-4x-x^2} = x+4$.

14. (Почв-87.2) Решить неравенство $\sqrt{2x+3} \geq x$.

15. (Хим-96.2) Решить неравенство $\sqrt{x+5} > 7-x$.

16. (Экон-95.1) Решить неравенство $2x-5 < \sqrt{x^2-x-6}$.

17. (Псих-97.2) Решить неравенство $\sqrt{t+3} > 5-2t$.

18. (Псих-88.3) Решить неравенство $2x-11 < 2\sqrt{36-x^2}$.

19. (ВМК-75.1) Решить неравенство $\sqrt{x^2+4x-5}-2x+3>0$.

20. (Геол-04.3) Решить неравенство $\sqrt{441-x^2} \leq x+21$.

21. (Геол.ОГ-84.2) Решить неравенство $\sqrt{x^2-3x+2} \leq 3x-3$.

22. (Экон-03.1) Решить неравенство $\sqrt{8+2x-x^2} \leq 2x+1$.

23. (Физ-05.2) Решить неравенство $\sqrt{5x-x^2+6} < \sqrt{6}-x$.

24. (Физ-85.2) Решить уравнение $\sqrt{x^4-2x-5} = 1-x$.

25. (Физ-99(2).2) Решить уравнение $\sqrt{x+2}\cdot\sqrt{2x+1} = x+4$.

26. (Экон-00.1) Решить уравнение $3\sqrt{x^2-4x+4}-4-x = \left(\sqrt{-x^2+x+2}\right)^2$.

27. (ИСАА-91.1) Решить уравнение $\sqrt{3x-5}-\sqrt{4-x}=1$.

28. (Почв-98.1) Решить уравнение $\sqrt{x+1}-\sqrt{4x-3}=1$.

29. (Псих-93.2) Решить неравенство $\sqrt{1-x}-\sqrt{x} > \dfrac{1}{\sqrt{3}}$.

30. (Геол.ОГ-82.2) Решить уравнение $\sqrt{x+3}-\sqrt{2x-1}=\sqrt{3x-2}$.

2.4. Смешанные задачи

Данный раздел рекомендуется изучать только после детального ознакомления с предыдущими базовыми разделами. В противном случае рекомендуется либо отложить его изучение, либо вернуться к изучению предыдущих разделов до достижения необходимого уровня знаний.

1. (ЕГЭ) Пусть $(x_0; y_0)$ – решение системы уравнений $\begin{cases} \sqrt{x-1} - y = 0, \\ y - |x-5| = 2. \end{cases}$ Найти разность $x_0 - y_0$.
2. (ЕГЭ) Решить уравнение $\sqrt{4 - 7x|x+2|} = 3x + 2$.
3. (Геогр-95.3) Решить уравнение $\sqrt{2 - x^2} = |x| - 1$.
4. (Псих-99.1) Решить неравенство $\dfrac{5x-3}{\sqrt{7x-4}} < 1$.
5. (Физ-98(1).2) Решить уравнение $\sqrt{\dfrac{4}{x-2} + 1} = \dfrac{1}{x-2}$.
6. (Физ-00.2) Решить уравнение $\dfrac{1}{\sqrt{x+2}} + \sqrt{x+2} = \sqrt{3x+1}$.
7. (М/м-94(1).2) Решить уравнение $3\sqrt{x+4} = 5 - 2|x+2|$.
8. (Физ-00(2).2) Решить неравенство $\sqrt{x^2 + |x-4| - 18} > x - 4$.
9. (М/м-98.1) Решить неравенство $3\sqrt{|x+1| - 3} \geq \sqrt{x^2 - 2x - 3}$.
10. (ВМК-94.2) Решить неравенство $\sqrt{x-3} \leq 3 - |x-6|$.
11. (Физ-97(2).3) Решить неравенство $\sqrt{x^2 + x + 4} \leq 2x + |3x-2|$.
12. (Экон.В-98.1) Решить неравенство $\sqrt{x^2 + 3x + 2} < 1 + \sqrt{x^2 - x + 1}$.
13. (Экон.К-74.1) Решить уравнение $\sqrt{2x^2 - 4x} = \sqrt{x^2 + 1} + \sqrt{x^2 - 1}$.
14. (Биол-97.3) Решить неравенство $\sqrt{|1 - 8x| - 2} \leq x + 1$.
15. (Экон-93.3) Решить неравенство $3\sqrt{x+2} \leq 6 - |x-2|$.
16. (ИСАА-93.1) Решить неравенство $\dfrac{\sqrt{x^2 - 5x + 8}}{3 - x} \geq 1$.
17. (М/м-95(2).1) Решить неравенство $\dfrac{4x + 15 - 4x^2}{\sqrt{4x+15} + 2x} \geq 0$.
18. (Биол-93.3) Решить неравенство $5\sqrt{1 - \dfrac{1}{z}} > \dfrac{7z - 1}{z}$.
19. (Псих-83.2) Решить неравенство $\dfrac{\sqrt{51 - 2x - x^2}}{1 - x} < 1$.

20. (Экон.К-88.3) Решить неравенство $\dfrac{\sqrt{x^2+x+6}+3x+13}{x+5} > 1$.

21. (Экон-98.3) Решить неравенство $\sqrt{x+4(2-\sqrt{4+x})} < \dfrac{x+12}{8-5\sqrt{4+x}}$.

22. (Геол-99(1).2) Решить систему уравнений $\begin{cases} 5y+4x=\sqrt{16x^2-25y^2}, \\ x^2+6x-7=0. \end{cases}$

23. (Геол-72.3) Решить неравенство $\dfrac{1}{\sqrt{3-x}} > \dfrac{1}{x-2}$.

24. (Филол-76.2) Найти все целочисленные решения неравенства $\sqrt[6]{z+1} < \sqrt[8]{6-z}$.

25. (М/м-90.3) Решить неравенство $\dfrac{\sqrt{1-x^3}-1}{1+x} \le x$.

26. (М/м-96(1).2) Решить неравенство $\dfrac{x^3-8+6x(2-x)}{|3-4x|} \le \sqrt{4x-3}$.

27. (Почв-97.6) Для каждого значения параметра a решить неравенство
а) $\sqrt{a^2-x^2} \ge a+1$; б) $\sqrt{a^2-x^2} \ge 2-a$.

28. (Псих-89.5) Для каждого значения параметра a решить неравенство
а) $x+2a-2\sqrt{3ax+a^2} > 0$; б) $x+2a-\sqrt{3ax+4a^2} > 0$.

29. (Почв-99.7) Для каждого $b \le 0$ решить неравенство $\dfrac{\sqrt{x^2-1}}{x} \ge b$.

3. Преобразование тригонометрических выражений, стандартные тригонометрические уравнения

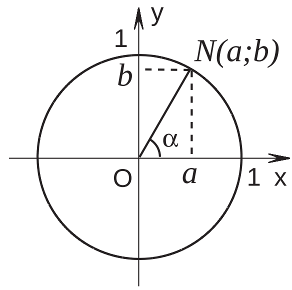
3.1. Соотношения между тригонометрическими функциями одного и того же аргумента, формулы двойного и половинного аргументов

Теоретический материал

Рассмотрим окружность с центром в начале координат радиуса, равного единице (эту окружность обычно называют *тригонометрической окружностью*).

Рассмотрим произвольное действительное число α и радиус ON, образующий с положительным направлением оси Ox угол, радианная мера которого равна числу α (положительным считается направление против хода часовой стрелки).

Пусть конец единичного радиуса ON, соответствующего углу α, имеет координаты $N(a;b)$.



Определение. Число, равное ординате конца единичного радиуса, образующего угол α с положительным направлением оси Ox, называется *синусом* угла в α радиан и обозначается $\sin\alpha$.

Поскольку каждому значению величины угла α соответствует единственная точка $N(a;b)$ такая, что радиус ON образует угол α с осью Ox, то введённое отображение $y=\sin\alpha$ является функцией.

Определение. *Косинусом* угла в α радиан называется число, равное абсциссе конца единичного радиуса, образующего угол α с положительным направлением оси Ox. Оно обозначается $\cos\alpha$.

Поскольку каждому значению величины угла α на тригонометрической окружности соответствует единственная точка $N(a;b)$ такая, что радиус ON образует угол α с осью Ox, то введённое отображение $y=\cos\alpha$ является функцией.

Определение. *Тангенсом* угла α, $\alpha\neq\dfrac{\pi}{2}+\pi n$, $n\in\mathbb{Z}$, называется число, равное отношению синуса угла α к косинусу этого угла. Тангенс угла обозначают $\operatorname{tg}\alpha$.

Так как каждому значению величины угла α, кроме $\alpha=\dfrac{\pi}{2}+\pi n$, $n\in\mathbb{Z}$, можно поставить в соответствие однозначно определённое значение $y=\operatorname{tg}\alpha$, то это соответствие является функцией.

Определение. *Котангенсом* угла α, $\alpha\neq\pi n$, $n\in\mathbb{Z}$, называется число, равное отношению косинуса угла α к синусу этого угла. Котангенс обозначают $\operatorname{ctg}\alpha$.

Так как каждому значению величины угла α, кроме $\alpha=\pi n$, $n\in\mathbb{Z}$, можно поставить в соответствие однозначно определённое значение $y=\operatorname{ctg}\alpha$, то это соответствие является функцией.

Соотношения между тригонометрическими функциями одного и того же аргумента:

$$\sin^2 x+\cos^2 x=1 \qquad (\textit{основное тригонометрическое тождество});$$

$$\operatorname{tg}x\cdot\operatorname{ctg}x=1,\quad x\neq\frac{\pi n}{2},\quad n\in\mathbb{Z};$$

$$1+\operatorname{tg}^2 x=\frac{1}{\cos^2 x},\quad x\neq\frac{\pi}{2}+\pi n,\quad n\in\mathbb{Z};\qquad 1+\operatorname{ctg}^2 x=\frac{1}{\sin^2 x},\quad x\neq\pi n,\quad n\in\mathbb{Z}.$$

Формулы двойного аргумента:

$$\sin 2x=2\sin x\cos x;\qquad \cos 2x=\cos^2 x-\sin^2 x=2\cos^2 x-1=1-2\sin^2 x;$$

$$\operatorname{tg}2x=\frac{2\operatorname{tg}x}{1-\operatorname{tg}^2 x},\quad x\neq\frac{\pi}{4}+\frac{\pi}{2}k,\quad k\in\mathbb{Z},\quad x\neq\frac{\pi}{2}+\pi n,\quad n\in\mathbb{Z}.$$

Формулы тройного аргумента:

$$\sin 3x=3\sin x-4\sin^3 x;\qquad \cos 3x=4\cos^3 x-3\cos x.$$

Формулы половинного аргумента (для синуса и косинуса – формулы понижения степени):

$$\sin^2\frac{x}{2}=\frac{1-\cos x}{2};\qquad \cos^2\frac{x}{2}=\frac{1+\cos x}{2};$$

$$\operatorname{tg}\frac{x}{2}=\frac{\sin x}{1+\cos x},\ x\neq\pi+2\pi n,\ \ n\in\mathbb{Z};\qquad \operatorname{tg}\frac{x}{2}=\frac{1-\cos x}{\sin x},\ x\neq\pi n,\ \ n\in\mathbb{Z}.$$

Примеры решения задач

Пример 1. (Псих-86.1) Найти $\operatorname{tg}^2 2\alpha$, если $\sin\alpha=-\dfrac{2}{\sqrt{11}}$.

Решение. Выразим тангенс через синус и косинус, распишем двойные углы и перейдём от косинуса к синусу с помощью основного тождества:

$$\operatorname{tg}^2 2\alpha=\frac{\sin^2 2\alpha}{\cos^2 2\alpha}=\frac{4\sin^2\alpha\cos^2\alpha}{(1-2\sin^2\alpha)^2}=\frac{4\sin^2\alpha(1-\sin^2\alpha)}{(1-2\sin^2\alpha)^2}=\frac{4\cdot\frac{4}{11}\cdot\frac{7}{11}}{\left(1-\frac{8}{11}\right)^2}=\frac{112}{9}.$$

Другой способ: $\operatorname{tg}^2 2\alpha=\dfrac{1}{\cos^2 2\alpha}-1=\dfrac{1}{(1-2\sin^2\alpha)^2}-1=\dfrac{1}{\left(1-\frac{8}{11}\right)^2}-1=\dfrac{112}{9}.$

Ответ. $\dfrac{112}{9}$.

Пример 2. (Почв-00.3) Найти $\operatorname{tg}2\alpha$, если известно, что $\sin\alpha=\dfrac{4}{5}$, $\sin 4\alpha>0$.

Решение. Из основного тригонометрического тождества следует, что

$$\cos\alpha=\pm\frac{3}{5}\quad\Longrightarrow\quad\operatorname{tg}\alpha=\pm\frac{4}{3}\quad\Longrightarrow\quad\operatorname{tg}2\alpha=\frac{2\operatorname{tg}\alpha}{1-\operatorname{tg}^2\alpha}=\frac{\pm\frac{8}{3}}{1-\frac{16}{9}}=\pm\frac{24}{7}.$$

Так как $\sin 4\alpha=2\sin 2\alpha\cos 2\alpha>0\iff\operatorname{tg}2\alpha=\dfrac{\sin 2\alpha}{\cos 2\alpha}>0$, то $\operatorname{tg}2\alpha>0$.

Ответ. $\dfrac{24}{7}$.

Задачи

1. (ЕГЭ) Упростить выражение $\dfrac{\cos^4\alpha+\sin^2\alpha\cos^2\alpha}{\sin^2\alpha}$.
2. (ЕГЭ) Найти значение выражения $2-\operatorname{tg}^2 x\cdot\cos^2 x$, если $\sin x=0{,}2$.
3. (ЕГЭ) Найти $\operatorname{tg}\alpha$, если $\cos\alpha=-\dfrac{3}{2\sqrt{7}}$, $\alpha\in\left(\dfrac{\pi}{2};\pi\right)$.
4. (ЕГЭ) Упростить выражение $\dfrac{1+\cos 2\alpha}{1-\cos 2\alpha}$.

5. (ЕГЭ) Найти значение выражения $3\sqrt{2}\sin 2x$, если $\sin x = -\dfrac{1}{\sqrt{3}}$, $\dfrac{\pi}{2} < x < \dfrac{3\pi}{2}$.

6. (ВМК-80.1) Вычислить $\cos 2\alpha$, если $\sin\alpha = \dfrac{1}{3}$.

7. (Хим-95(1).2) Найти $\sin 2\alpha$, если $\sin\alpha = \dfrac{1}{\sqrt{10}}$ и $0 < \alpha < \dfrac{\pi}{2}$.

8. (Геол-00.2) Вычислить $\operatorname{tg} 2x$, если $\operatorname{tg}\dfrac{x}{2} = \dfrac{1}{5}$.

9. (Физ-87.3) Известно, что $\sin\alpha = -\dfrac{\sqrt{5}}{3}$, $\pi < \alpha < \dfrac{4\pi}{3}$. Найти $\cos\alpha$ и $\operatorname{tg}\dfrac{\alpha}{2}$.

10. (Почв-98.2) Найти $\cos\dfrac{\alpha}{2}$, если $\operatorname{tg}\alpha = \dfrac{3}{4}$ и $\pi < \alpha < 2\pi$. Установить, какое из чисел больше: $\left|\cos\dfrac{\alpha}{2}\right|$ или $\dfrac{2}{7}$?

3.2. Простейшие тригонометрические уравнения. Разложение на множители, сведение к квадратному уравнению

Теоретический материал

Простейшими тригонометрическими уравнениями называются уравнения вида

$$\sin x = a,\ \ \cos x = a \ (\text{где } |a| \le 1);$$

$$\operatorname{tg} x = a,\ \ \operatorname{ctg} x = a \ (\text{где } a \in (-\infty; +\infty)).$$

Формулы решений этих уравнений имеют следующий вид:

$$\sin x = a \quad \text{при} \quad |a| \le 1 \quad \Longleftrightarrow \quad x = (-1)^n \arcsin a + \pi n,\ \ n \in \mathbb{Z};$$

$$\cos x = a \quad \text{при} \quad |a| \le 1 \quad \Longleftrightarrow \quad x = \pm\arccos a + 2\pi n,\ \ n \in \mathbb{Z};$$

$$\operatorname{tg} x = a \quad \Longleftrightarrow \quad x = \operatorname{arctg} a + \pi n,\ \ n \in \mathbb{Z};$$

$$\operatorname{ctg} x = a \quad \Longleftrightarrow \quad x = \operatorname{arcctg} a + \pi n,\ \ n \in \mathbb{Z}.$$

В частных случаях $a = 0$, $a = 1$, $a = -1$ получаются следующие формулы:

$$\sin x = 0 \quad \Longleftrightarrow \quad x = \pi n,\ n \in \mathbb{Z};$$

$$\sin x = 1 \quad \Longleftrightarrow \quad x = \frac{\pi}{2} + 2\pi n,\ \ n \in \mathbb{Z};$$

$$\sin x = -1 \quad \Longleftrightarrow \quad x = -\frac{\pi}{2} + 2\pi n,\ \ n \in \mathbb{Z};$$

$$\cos x = 0 \quad \Longleftrightarrow \quad x = \frac{\pi}{2} + \pi n,\ \ n \in \mathbb{Z};$$

$$\cos x = 1 \quad \Longleftrightarrow \quad x = 2\pi n,\ \ n \in \mathbb{Z};$$

$$\cos x = -1 \iff x = \pi + 2\pi n, \quad n \in \mathbb{Z};$$
$$\operatorname{tg} x = 0 \iff x = \pi n, \quad n \in \mathbb{Z};$$
$$\operatorname{ctg} x = 0 \iff x = \frac{\pi}{2} + \pi n, \quad n \in \mathbb{Z}.$$

Решение уравнения $\sin x = a$ часто удобно записывать в виде двух серий корней:

$$x = \arcsin a + 2\pi n, \quad x = \pi - \arcsin a + 2\pi n.$$

Уравнения вида

$$\sin(\omega x+\phi) = a, \quad \cos(\omega x+\phi) = a, \quad \operatorname{tg}(\omega x+\phi) = a, \quad \operatorname{ctg}(\omega x+\phi) = a, \quad \text{где } a, \omega, \phi \in \mathbb{R}$$

также относятся к простейшим. Их следует решать по общим формулам, заменив $\omega x + \phi$ на t, и уже после этого находить x из равенства $\omega x + \phi = t$.

Примеры решения задач

Пример 1. (ВМК-80.2) Решить уравнение $\sin 2x - \sqrt{3}\cos x = 0$.

Решение. Применим формулу синуса двойного угла и разложим левую часть уравнения на множители:

$$\cos x(2\sin x - \sqrt{3}) = 0 \iff \left[\begin{array}{l} \cos x = 0; \\ \sin x = \dfrac{\sqrt{3}}{2}; \end{array}\right. \iff \left[\begin{array}{l} x = \dfrac{\pi}{2} + \pi n, \ n \in \mathbb{Z}; \\ x = (-1)^m \dfrac{\pi}{3} + \pi m, \ m \in \mathbb{Z}. \end{array}\right.$$

Ответ. $\frac{\pi}{2} + \pi n, \ (-1)^m\frac{\pi}{3} + \pi m; \ n, \ m \in \mathbb{Z}$.

Пример 2. (Геол-87.2) Решить уравнение $4\sin^2 x + 4\cos x = 1$.

Решение. Используя основное тригонометрическое тождество, сведём уравнение к квадратному:

$$4\cos^2 x - 4\cos x - 3 = 0 \iff \left[\begin{array}{l} \cos x = -\dfrac{1}{2}; \\ \cos x = \dfrac{3}{2} > 1; \end{array}\right. \iff x = \pm\frac{2\pi}{3} + 2\pi n, \ n \in \mathbb{Z}.$$

Ответ. $\pm\frac{2\pi}{3} + 2\pi n, \quad n \in \mathbb{Z}$.

Пример 3. (ВМК-94.1) Решить уравнение $12\sin 5x = \cos 10x + 7$.

Решение. Применим формулу косинуса двойного угла и сведём уравнение к квадратному:

$$\sin^2 5x + 6\sin 5x - 4 = 0 \iff \left[\begin{array}{l} \sin 5x = \sqrt{13} - 3; \\ \sin 5x = -3 - \sqrt{13} < -1; \end{array}\right. \iff$$
$$\iff 5x = (-1)^n \arcsin(\sqrt{13} - 3) + \pi n, \ n \in \mathbb{Z}.$$

Ответ. $\frac{(-1)^n}{5}\arcsin(\sqrt{13} - 3) + \frac{\pi n}{5}, \quad n \in \mathbb{Z}$.

Задачи

1. (ЕГЭ) Решить уравнение $\sin 4x = \dfrac{\sqrt{3}}{2}$.
2. (ЕГЭ) Укажите наименьший положительный корень уравнения $\sin \pi x(\cos x - 2) = 0$.
3. (ЕГЭ) Найдите наибольший отрицательный корень уравнения $\cos x + \cos 2x = 2$.
4. (Почв-99.2) Решить уравнение $\cos 2x = \sin x$.
5. (Экон-87.1) Решить уравнение $\cos 2x + 3\sqrt{2}\sin x - 3 = 0$.
6. (Хим-96(1).2) Решить уравнение $5 + \cos 2x = 6\cos x$.
7. (Георг-89.1) Решить уравнение $\sin\left(x - \dfrac{\pi}{3}\right) = \cos\left(2x - \dfrac{2\pi}{3}\right)$.
8. (Биол-99.1) Решить уравнение $8\cos 6x - 12\sin 3x = 3$.
9. (Биол-00.2) Решить уравнение $3\cos 2x + 4 + 11\sin x = 0$.
10. (Георг-99(1).1) Решить уравнение $2\cos 4x - 4\sin 2x = -1$.
11. (ВКНМ-99(1).1) Решить уравнение $(7\sin x - 4\sqrt{3})(7\sin x - 5\sqrt{2}) = 0$.
12. (Экон-85.2) Решить уравнение $2\sin x = 3\operatorname{ctg} x$.
13. (Физ-76.1) Решить уравнение $\cos 2x + 4\sin^3 x = 1$.
14. (Экон-76.2) Решить уравнение $3\operatorname{tg} x = 2\sqrt{5}\cos\dfrac{x}{2}$.
15. (Геол-00(1).2) Решить уравнение $5\sin\dfrac{x}{2} = \cos\dfrac{x}{2}\cos\dfrac{x}{4}$.
16. (Геол-98.3) Найти все решения уравнения $5 + \dfrac{1}{\sin^2 3x} = 7\operatorname{ctg} 3x$.
17. (Экон.К-84.3) Найти все решения уравнения $3 - 12\sin^2 x - 2\cos 4x = -\dfrac{5}{1 + \operatorname{tg}^2 x}$.
18. (Экон.В-98.3) Решить уравнение $\cos(2x^2) - \sqrt{3}\cos(x^2) - 2 = 0$.
19. (ВМК-85.3) Решить уравнение $4 - \cos 2\pi(13x + 9)^2 = 5\sin\pi(13x + 9)^2$.

3.3. Применение тригонометрических формул для сведения уравнений к простейшим

Теоретический материал

Формулы для тригонометрических функций от суммы и разности:

$$\sin(x+y) = \sin x \cos y + \cos x \sin y;$$

$$\sin(x-y) = \sin x \cos y - \cos x \sin y;$$

$$\cos(x+y) = \cos x \cos y - \sin x \sin y;$$

$$\cos(x-y) = \cos x \cos y + \sin x \sin y;$$

$$\operatorname{tg}(x+y) = \frac{\operatorname{tg} x + \operatorname{tg} y}{1 - \operatorname{tg} x \cdot \operatorname{tg} y}, \quad x, y, x+y \neq \frac{\pi}{2} + \pi n, \ \ n \in \mathbb{Z};$$

$$\operatorname{tg}(x-y) = \frac{\operatorname{tg} x - \operatorname{tg} y}{1 + \operatorname{tg} x \cdot \operatorname{tg} y}, \quad x, y, x-y \neq \frac{\pi}{2} + \pi n, \ \ n \in \mathbb{Z};$$

Формулы преобразования суммы в произведение:

$$\sin x + \sin y = 2 \sin \frac{x+y}{2} \cos \frac{x-y}{2};$$

$$\sin x - \sin y = 2 \sin \frac{x-y}{2} \cos \frac{x+y}{2};$$

$$\cos x + \cos y = 2 \cos \frac{x+y}{2} \cos \frac{x-y}{2};$$

$$\cos x - \cos y = -2 \sin \frac{x+y}{2} \sin \frac{x-y}{2};$$

$$\operatorname{tg} x + \operatorname{tg} y = \frac{\sin(x+y)}{\cos x \cos y}, \quad x, y \neq \frac{\pi}{2} + \pi n, \quad n \in \mathbb{Z};$$

$$\operatorname{tg} x - \operatorname{tg} y = \frac{\sin(x-y)}{\cos x \cos y}, \quad x, y \neq \frac{\pi}{2} + \pi n, \quad n \in \mathbb{Z}.$$

Формулы преобразования произведения в сумму:

$$\sin x \sin y = \frac{1}{2}(\cos(x-y) - \cos(x+y));$$

$$\cos x \cos y = \frac{1}{2}(\cos(x+y) + \cos(x-y));$$

$$\sin x \cos y = \frac{1}{2}(\sin(x+y) + \sin(x-y)).$$

Формулы приведения:

$$\sin\left(\frac{\pi}{2}-x\right)=\cos x;\quad \cos\left(\frac{\pi}{2}-x\right)=\sin x;$$

$$\sin(\pi-x)=\sin x;\quad \cos(\pi-x)=-\cos x.$$

Соотношения между синусом, косинусом и тангенсом половинного угла:

$$\sin x=\frac{2\operatorname{tg}\frac{x}{2}}{1+\operatorname{tg}^2\frac{x}{2}},\quad x\neq\pi+2\pi n,\ \ n\in\mathbb{Z};$$

$$\cos x=\frac{1-\operatorname{tg}^2\frac{x}{2}}{1+\operatorname{tg}^2\frac{x}{2}},\quad x\neq\pi+2\pi n,\ \ n\in\mathbb{Z};$$

$$\operatorname{tg} x=\frac{2\operatorname{tg}\frac{x}{2}}{1-\operatorname{tg}^2\frac{x}{2}},\quad x\neq\pi+2\pi n,\quad x\neq\frac{\pi}{2}+\pi k,\quad n,k\in\mathbb{Z};$$

$$\operatorname{ctg} x=\frac{1-\operatorname{tg}^2\frac{x}{2}}{2\operatorname{tg}\frac{x}{2}},\quad x\neq\pi n,\quad n\in\mathbb{Z}.$$

Эти формулы иногда называют формулами универсальной тригонометрической подстановки.

Все формулы нужно уметь читать не только «слева направо», но и «справа налево». Так, например, в записи $\sin\frac{\pi}{4}\cos x-\cos\frac{\pi}{4}\sin x$ нужно узнавать $\sin\left(\frac{\pi}{4}-x\right)$, а не принимать ошибочно за $\sin\left(x-\frac{\pi}{4}\right)$.

Проверьте себя и напишите, чему равно выражение $\sqrt{\frac{1-\cos x}{1+\cos x}}$. Если вы убеждены в том, что это выражение равно тангенсу половинного угла, обратите внимание на то, что выражение, о котором идёт речь, неотрицательно, а тангенс половинного угла – знакопеременная функция. Таким образом,

$$\sqrt{\frac{1-\cos x}{1+\cos x}}=\left|\operatorname{tg}\frac{x}{2}\right|,$$

и не следует писать в этом случае $\pm\operatorname{tg}\frac{x}{2}$. Мы пишем $\pm\operatorname{tg}\frac{x}{2}$, чтобы «примирить» выражение, стоящее в левой части, которое может быть отрицательным, с неотрицательным корнем. Поставив $\pm\operatorname{tg}\frac{x}{2}$, мы получаем двузначную функцию; символ «$\pm$» говорит лишь о том, что для каждого фиксированного x мы обязаны выбрать определённый знак, в зависимости от того, в какой четверти тригонометрического круга оказывается угол, стоящий под знаком функции в левой части формулы.

Если уравнение не является простейшим, то его нужно свести к одному или нескольким простейшим уравнениям, совокупность которых равносильна заданному.

При решении тригонометрических уравнений часто используется метод разложения на множители и метод замены переменной (введение новой переменной).

При решении уравнений следует следить за равносильностью преобразований. Иначе при решении полученной совокупности простейших уравнений возможно появление посторонних корней.

Примеры решения задач

Пример 1. (Геол-91.1) Решить уравнение $\sin 7x\cos x = \sin 6x$.

Решение. *Первый способ.* Преобразуем произведение тригонометрических функций в сумму, после чего используем формулу разности синусов:

$$\sin 8x + \sin 6x = 2\sin 6x \iff \sin 8x - \sin 6x = 0 \iff 2\sin x\cos 7x = 0,$$

откуда $\sin x = 0$ или $\cos 7x = 0$; следовательно, $x = \pi n$ или $x = \dfrac{\pi}{14} + \dfrac{\pi m}{7}$.

Второй способ. Представим $6x$ в правой части уравнения в виде $7x - x$ и воспользуемся формулой синуса разности:

$$\sin 7x\cos x = \sin(7x - x) \iff \sin 7x\cos x = \sin 7x\cos x - \cos 7x\sin x \iff$$

$\iff \cos 7x\sin x = 0$. Далее аналогично.

Ответ. $\pi n,\ \dfrac{\pi}{14} + \dfrac{\pi m}{7};\quad n,\ m \in \mathbb{Z}$.

Пример 2. (Физ-83.1) Решить уравнение $\sin 3x + \sin 5x = \sin 4x$.

Решение. Преобразовав сумму тригонометрических функций в произведение, получим

$$2\sin 4x\cos x = \sin 4x \iff \left[\begin{array}{l}\sin 4x = 0;\\ \cos x = \dfrac{1}{2};\end{array}\right. \iff \left[\begin{array}{l}x = \dfrac{\pi n}{4},\ n \in \mathbb{Z};\\ x = \pm\dfrac{\pi}{3} + 2\pi m,\ m \in \mathbb{Z}.\end{array}\right.$$

Ответ. $\dfrac{\pi n}{4},\ \pm\dfrac{\pi}{3} + 2\pi m;\quad n,\ m \in \mathbb{Z}$.

Пример 3. (ИСАА-91.3) Решить уравнение
$\cos^2(45^\circ + x) = \cos^2(45^\circ - x) + \sqrt{5}\cos x$.

Решение. Понизим степень у квадратов косинусов:

$$1+\cos(90^\circ+2x) = 1+\cos(90^\circ-2x)+2\sqrt{5}\cos x \iff \sin 2x+\sqrt{5}\cos x = 0 \iff$$

$$\iff \left[\begin{array}{l}\cos x = 0;\\ \sin x = -\dfrac{\sqrt{5}}{2} < -1;\end{array}\right. \iff x = 90^\circ + n\cdot 180^\circ,\ n \in \mathbb{Z}.$$

Ответ в градусах, согласно условию.

Ответ. $90^\circ + n\cdot 180^\circ,\ n \in \mathbb{Z}$.

Пример 4. (ВМК-94(1).3) Вычислить $\cos 2\left(\alpha-\dfrac{\pi}{4}\right)$, если $\operatorname{tg}\alpha=-\dfrac{1}{\sqrt{7}}$.

Решение. Преобразуем искомое выражение, используя формулу приведения и формулу универсальной тригонометрической подстановки:

$$\cos 2\left(\alpha-\frac{\pi}{4}\right)=\cos\left(2\alpha-\frac{\pi}{2}\right)=\sin 2\alpha=\frac{2\operatorname{tg}\alpha}{1+\operatorname{tg}^2\alpha}=\frac{-\frac{2}{\sqrt{7}}}{1+\frac{1}{7}}=-\frac{\sqrt{7}}{4}.$$

Ответ. $-\dfrac{\sqrt{7}}{4}$.

Задачи

1. (ЕГЭ) Решить уравнение $\cos 2x\cos x-\sin 2x\sin x=1$.
2. (ЕГЭ) Решить уравнение $\sin(\pi-x)-\cos\left(\dfrac{\pi}{2}+x\right)=-1.$
3. (Хим-00.2) Решить уравнение $\cos 3x+\sin x\sin 2x=0$.
4. (Физ-98(1).1) Решить уравнение $\sin 3x-\sin 2x\cos x=0$.
5. (Физ-97(2).1) Решить уравнение $\cos 9x-\cos 7x=\sqrt{2}\sin x$.
6. (Физ-94(1).1) Решить уравнение $\sin x\sin 3x=\dfrac{1}{2}$.
7. (Хим-78.1) Решить уравнение $\sin 2x+\sin 6x=3\cos^2 2x$.
8. (Физ-99(1).1) Решить уравнение $\sin 14x=\cos 4x-\sin 6x$.
9. (Физ-00(1).1) Решить уравнение $\sin 5x+\sin 2x=\sin 7x$.
10. (Физ-99(2).1) Решить уравнение $\sin x-\sin\dfrac{3x}{2}\cos\dfrac{x}{2}=0$.
11. (Физ-96.1) Найти все решения уравнения $\cos 3x-\sin\left(7x-\dfrac{\pi}{2}\right)=\cos 5x$.
12. (Геогр-74.2) Решить уравнение $\sin x+\cos\left(5x-\dfrac{9\pi}{2}\right)=\sqrt{3}\sin(3x+\pi)$.
13. (Хим-83.1) Решить уравнение
$\cos\left(2x+\dfrac{\pi}{4}\right)+\cos\left(2x-\dfrac{\pi}{4}\right)+4\sin x=2+\sqrt{2}(1-\sin x)$.
14. (Псих-90.1) Решить уравнение
$4\sin^2\left(2\left(x+\dfrac{\pi}{2}\right)\right)-2(\sqrt{5}-\sqrt{3})\cos(2x-\pi)+\sqrt{15}-4=0.$
15. (Биол-81.2) Решить уравнение $\cos\left(2x-\dfrac{7\pi}{2}\right)=\sin(4x+3\pi)$.
16. (Экон.К-80.4) Решить уравнение $\sin\left(\dfrac{\pi}{3}-x\right)+\cos\left(\dfrac{\pi}{6}-x\right)=\sqrt{3}$.

17. (Почв-96(1).1) Найдите $\cos\left(\alpha+\dfrac{\pi}{3}\right)$, если известно, что $\sin\alpha=-\dfrac{3}{5}$, $\operatorname{tg}\alpha>0$.

18. (Геол-94(1).4) Найти все решения уравнения $\sin 5x=\sin 5$.

19. (Физ-93.2) Решить уравнение $\cos 5x=\cos(5+x)$.

20. (ИСАА-00.3) Решить $3\sin 2x-\dfrac{1}{2}=4\cos\left(x-\dfrac{\pi}{4}\right)$.

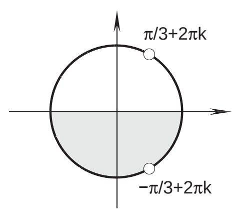
21. (М/м-00(2).4) Найти $\dfrac{\sin(\alpha+\gamma)\sin(\beta+\gamma)}{\cos\gamma\cos(\alpha+\beta+\gamma)}$, если $\dfrac{\sin(\alpha+\gamma)\sin(\beta+\gamma)}{\cos\alpha\cos\beta}=\dfrac{4}{9}$.

3.4. Различные задачи на отбор корней

Данный раздел рекомендуется изучать только после детального ознакомления с предыдущими базовыми разделами. В противном случае рекомендуется либо отложить его изучение, либо вернуться к изучению предыдущих разделов до достижения необходимого уровня знаний.

Примеры решения задач

Пример 1. (ЕГЭ.А) Указать корни уравнения $\cos x=\dfrac{1}{2}$, для которых $\sin x<0$.



Решение. Решениями исходного уравнения являются $x=\pm\dfrac{\pi}{3}+2\pi k,\ k\in\mathbb{Z}$. Так как синус отрицателен в третьей и четвёртой четвертях, то нам подходит только $x=-\dfrac{\pi}{3}+2\pi k,\ k\in\mathbb{Z}$.

Ответ. $-\dfrac{\pi}{3}+2\pi k,\ k\in\mathbb{Z}$.

Пример 2. (Биол-85.2) Найти все корни уравнения $7\cos\left(\dfrac{3\pi}{2}-x\right)=1+5\cos 2x$, принадлежащие отрезку $\left[\dfrac{\pi}{2};\dfrac{3\pi}{2}\right]$.

Решение. Применив формулы приведения и косинуса двойного угла, получим

$$-7\sin x=1+5(1-2\sin^2 x)\iff 10\sin^2 x-7\sin x-6=0\iff\left[\begin{array}{l}\sin x=\dfrac{6}{5}>1,\\ \sin x=-\dfrac{1}{2}.\end{array}\right.$$

Значит, $x=(-1)^{n+1}\dfrac{\pi}{6}+\pi n,\ n\in\mathbb{Z}$.

Для удобства отбора корней представим это решение в виде двух серий: $x_1=-\dfrac{\pi}{6}+2\pi l$ и $x_2=-\dfrac{5\pi}{6}+2\pi m,\ l,m\in\mathbb{Z}$.

Отберём $l \in \mathbb{Z}$ такие, что $x_1 \in \left[\frac{\pi}{2}; \frac{3\pi}{2}\right]$, то есть

$$\frac{\pi}{2} \le -\frac{\pi}{6} + 2\pi l \le \frac{3\pi}{2} \iff \frac{2\pi}{3} \le 2\pi l \le \frac{5\pi}{3} \iff \frac{1}{3} \le l \le \frac{5}{6};$$

видно, что таких целых l нет.

Для второй серии

$$\frac{\pi}{2} \le -\frac{5\pi}{6} + 2\pi m \le \frac{3\pi}{2} \iff \frac{4\pi}{3} \le 2\pi m \le \frac{7\pi}{3} \iff \frac{2}{3} \le m \le \frac{7}{6};$$

подходит $m = 1$. В результате $x = -\frac{5\pi}{6} + 2\pi = \frac{7\pi}{6}$.

Ответ. $\frac{7\pi}{6}$.

Пример 3. (ВМК-83.2) Решить уравнение $\frac{2\sin^2 x + 3\sqrt{2}\sin x - \sin 2x + 1}{2\sin x \cos x + 1} = -1$.

Решение. Область определения:

$$2\sin x \cos x + 1 \neq 0 \iff \sin 2x \neq -1 \iff x \neq -\frac{\pi}{4} + \pi k,\ k \in \mathbb{Z}.$$

Домножив на знаменатель исходное уравнение, получим

$$2\sin^2 x + 3\sqrt{2}\sin x - \sin 2x + 1 = -\sin 2x - 1 \iff 2\sin^2 x + 3\sqrt{2}\sin x + 2 = 0,$$

откуда либо $\sin x = -\sqrt{2}$, либо $\sin x = -\frac{1}{\sqrt{2}}$. В первом случае решений нет, так как $-\sqrt{2} < -1$. Во втором случае $x = (-1)^{n+1}\frac{\pi}{4} + \pi n,\ n \in \mathbb{Z}$. Эта серия разбивается на две: $x = -\frac{\pi}{4} + 2\pi l,\ l \in \mathbb{Z}$ – не входит в область определения, и $x = -\frac{3\pi}{4} + 2\pi m$, $m \in \mathbb{Z}$ – подходит.

Ответ. $-\frac{3\pi}{4} + 2\pi m,\ m \in \mathbb{Z}$.

Задачи

1. (ЕГЭ.А) Указать те корни уравнения $\cos x = -\frac{\sqrt{3}}{2}$, которые лежат в промежутке $[0; 2\pi]$.

2. (ЕГЭ.А) Указать те корни уравнения $\sin x = \frac{\sqrt{3}}{2}$, для которых $\cos x > 0$.

3. (ЕГЭ.В) Сколько корней имеет уравнение $\operatorname{tg} x = \frac{1}{\sqrt{3} - 2} + 2$ на промежутке $\left[-\pi; \frac{\pi}{2}\right]$?

4. (Филол-85.1) Найти все решения уравнения $2\sin^2 x = \sqrt{3}\sin x$, удовлетворяющие условию $-5 < x < -3$.
5. (М/м-89.1) Решить уравнение $4|\cos x| + 3 = 4\sin^2 x$.
6. (Геол-82.3) Решить уравнение $\sqrt{1-\cos^2 x} + 6\cos 2x = 0$.
7. (М/м-79.1) Найти все решения уравнения $1 - 5\sin x + 2\cos^2 x = 0$, удовлетворяющие неравенству $\cos x \geq 0$.
8. (Физ-84.1) Решить уравнение $\operatorname{tg} x + \dfrac{\cos x}{2-\sin x} = 0$.
9. (Геол.ОГ-78.1) Решить уравнение $\sqrt{2}\sin x + \operatorname{ctg} x = 0$.
10. (Псих-77.1) Решить уравнение $3\operatorname{tg}^2 x - 8\cos^2 x + 1 = 0$.
11. (Физ-00.1) Решить уравнение $3\cos 3x + \dfrac{2}{\cos x} = 3\cos x$.
12. (Биол-85.2) Найти все решения уравнения $5\cos 2x + 7\cos\left(x + \dfrac{\pi}{2}\right) + 1 = 0$, принадлежащие отрезку $\left[\dfrac{\pi}{2}; \dfrac{3\pi}{2}\right]$.
13. (Геол-80.2) Решить уравнение $\dfrac{2 - 3\sin x - \cos 2x}{6x^2 - \pi x - \pi^2} = 0$.
14. (Филол-75.3) Найти все решения уравнения $\operatorname{ctg}\dfrac{11\pi}{6} = \dfrac{2\operatorname{ctg} x + 3}{\operatorname{tg}\left(x + \dfrac{\pi}{6}\right)}$.
15. (Геол-99(1).1) Решить уравнение $\cos(6\sin x) = -1$.
16. (ВМК-83.2) Решить уравнение $\dfrac{1 + 2\sin^2 x - 3\sqrt{2}\sin x + \sin 2x}{2\sin x\cos x - 1} = 1$.
17. (ВМК-91.2) Найти все решения уравнения $\operatorname{tg}\left(\dfrac{3\pi}{2} + \dfrac{\pi\sqrt{2}}{4}\sin x\right) = 1$.
18. (Физ-00(2).1) Решить уравнение $\dfrac{\cos 6x}{\cos 2x} + 6\sin 2x + 1 = 0$.
19. (Псих-82.3) Решить уравнение $2\sin x - \sqrt[4]{3} = (\sqrt{2} - \sqrt[4]{12})\sqrt{\sin x}$.
20. (Экон-89.4) Найти все решения уравнения $\operatorname{tg}(4\sin x) = \sqrt{3}$, удовлетворяющие условию $\dfrac{\pi}{2} < x < \dfrac{3\pi}{2}$.

4. Стандартные текстовые задачи

4.1. Пропорциональные величины

Теоретический материал

В этом разделе собраны стандартные текстовые задачи, приводимые к одному линейному уравнению или к системе линейных уравнений.

Примеры решения задач

П р и м е р 1. (Биол-95.4) Саша и Серёжа дважды обменивались марками, причём каждый раз 1/7 количества марок, имевшихся на данный момент у Саши, обменивалась на половину количества марок, имевшихся у Серёжи. Сколько марок было у Саши и сколько у Серёжи до первого обмена, если после первого обмена у Саши было 945 марок, а после второго обмена у Серёжи – 220?

Р е ш е н и е. Пусть сначала у Саши было n марок, а у Серёжи m марок.

После первого обмена у Саши станет $\frac{6}{7}n + \frac{1}{2}m$ штук, а у Серёжи $\frac{1}{7}n + \frac{1}{2}m$ штук, причём $\frac{6}{7}n + \frac{1}{2}m = 945$.

После второго обмена у Серёжи будет $\frac{1}{7} \cdot 945 + \frac{1}{2}\left(\frac{1}{7}n + \frac{1}{2}m\right) = 220$ штук. Получаем систему уравнений:

$$\begin{cases} \frac{6}{7}n + \frac{1}{2}m = 945, \\ \frac{1}{7} \cdot 945 + \frac{1}{2}\left(\frac{1}{7}n + \frac{1}{2}m\right) = 220; \end{cases} \iff \begin{cases} \frac{6}{7}n + \frac{1}{2}m = 945, \\ \frac{1}{7}n + \frac{1}{2}m = 170; \end{cases} \iff \begin{cases} n = 1085, \\ m = 30. \end{cases}$$

О т в е т. 1085 и 30 штук.

Задачи

1. (ЕГЭ.А) На склад привезли 126 тонн яблок, груш и слив. Яблок оказалось в 4 раза больше, чем груш. Слив на 18 тонн меньше, чем груш. Сколько тонн яблок привезли на склад?

2. (Почв-84.1) Площади участков земли относятся как $4 : 3 : 5$. Средняя урожайность всех трёх участков одинакова и составляет 28 ц зерна с гектара. Известно, что с третьего участка собрано на 84 ц зерна больше, чем с первого. Определить, какова площадь каждого из трёх участков.

3. (Почв-93.1) Представить число 128 в виде суммы четырёх слагаемых так, чтобы первое слагаемое относилось ко второму, как $2 : 3$, второе к третьему, как $3 : 5$, а третье к четвёртому – как $5 : 6$.

4. (Почв-94(1).1) С двух полей, первое из которых по площади вдвое меньше второго, собрали урожай свёклы. Средняя урожайность составила 150 ц/га, в то время, как на первом поле собрали по 156 ц/га. Какова урожайность свёклы на втором поле?

5. (Почв-92.2) Самолёт, осуществляя полет по заданному маршруту, может лететь в метеоусловиях А, Б или В с одной и той же скоростью, но по-разному расходуя горючее. В первый раз самолёт находился в метеоусловиях А половину полётного времени, в метеоусловиях Б – треть времени, в метеоусловиях В – 1/6 полётного времени. Во второй раз он находился четверть времени в метеоусловиях А и 3/4 – в метеоусловиях В. В третий раз – по четверти полётного времени в метеоусловиях А и Б, а половину времени – в метеоусловиях В. На сколько процентов израсходует самолёт полётный норматив

горючего, двигаясь весь путь в метеоусловиях В, если в первый раз он израсходовал его на $101\frac{2}{3}\,\%$, во второй раз – на $92{,}5\,\%$, а в третий – на $97{,}5\,\%$?

6. (Соц-98.3) В городе N $9\,\%$ коренного населения в зимний период заняты народным промыслом. Летом $36\,\%$ коренного населения уезжает из города, но общая численность за счёт приезжающих туристов составляет $4/5$ от численности населения в зимний период. Определить, какая часть от общей численности населения в летний период занята народным промыслом, если среди коренного населения доля занятых народным промыслом осталась такой же, как в зимний период.

4.2. Арифметическая и геометрическая прогрессии

Теоретический материал

Последовательность чисел $a_1, a_2, \cdots, a_n$ называется *арифметической прогрессией*, если найдётся такое число d, называемое разностью прогрессии, что

$$a_2 = a_1 + d, \quad a_3 = a_2 + d, \quad \cdots, \quad a_n = a_{n-1} + d.$$

Для решения задач на арифметические прогрессии необходимо знать следующие формулы:

$$a_n = a_1 + (n-1)d, \quad a_k = \frac{a_{k-1} + a_{k+1}}{2},$$

$$S_n = a_1 + \cdots + a_n = \frac{a_1 + a_n}{2} \cdot n = \frac{2a_1 + (n-1)d}{2} \cdot n.$$

Последовательность чисел $b_1, b_2, \cdots, b_n$ (где $b_1 \neq 0$) называется *геометрической прогрессией*, если найдётся такое число $q \neq 0$, называемое знаменателем прогрессии, что

$$b_2 = b_1 q, \quad b_3 = b_2 q, \quad \cdots, \quad b_n = b_{n-1} q.$$

Для решения задач на геометрические прогрессии необходимо знать следующие формулы:

$$b_n = b_1 q^{n-1}, \qquad b_k^2 = b_{k-1} \cdot b_{k+1},$$

$$S_n = b_1 + \cdots + b_n = b_1 \cdot \frac{1 - q^n}{1 - q} \quad \text{при} \quad q \neq 1, \quad S_n = n \cdot b_1 \quad \text{при} \quad q = 1.$$

Если $|q| < 1$, то $b_1 + \cdots + b_n + \cdots = b_1 \cdot \dfrac{1}{1-q}$.

Примеры решения задач

П р и м е р 1. (Экон.В-98.2) Второй член арифметической прогрессии $a_1, a_2, \ldots$ равен 2, а сумма пятого и шестого членов равна 9. Найти сумму первых двадцати членов прогрессии, номера которых кратны 2.

Р е ш е н и е. Пусть a_1 и d – первый член и разность данной прогрессии. Тогда

$$\begin{cases} a_2 = 2, \\ a_5 + a_6 = 9; \end{cases} \iff \begin{cases} a_1 + d = 2, \\ (a_1 + 4d) + (a_1 + 5d) = 9; \end{cases} \iff \begin{cases} a_1 = \dfrac{9}{7}, \\ d = \dfrac{5}{7}. \end{cases}$$

Искомая сумма $S = a_2 + a_4 + a_6 + \dots + a_{38} + a_{40}$ может быть найдена как сумма членов арифметический прогрессии с разностью $2d$, первым членом a_2 и $n = 20$. В нашем случае формула суммы арифметической прогрессии примет вид:

$$S = \frac{2a_2 + (20-1)\cdot 2d}{2}\cdot 20 = \frac{2(a_1+d)+38d}{2}\cdot 20 = 10(2a_1 + 40d) = \frac{2180}{7}.$$

О т в е т. $\dfrac{2180}{7}$.

П р и м е р 2. (Хим-94(1).3) Для членов геометрической прогрессии $b_1, b_2, \dots$ известно, что $b_2b_4 = 25$ и $b_3 + b_5 = 15$. Найти b_1.

Р е ш е н и е. Пусть b_1 и q – первый член и знаменатель геометрической прогрессии, тогда $b_2b_4 = b_1q\cdot b_1q^3 = b_1^2q^4$, $b_3 + b_5 = b_1q^2 + b_1q^4 = b_1q^2(1+q^2)$ и

$$\begin{cases} b_2b_4 = 25, \\ b_3 + b_5 = 15; \end{cases} \iff \begin{cases} b_1^2q^4 = 25, \\ b_1q^2(1+q^2) = 15; \end{cases} \iff \begin{cases} b_1q^2 = \pm 5, \\ b_1q^2(1+q^2) = 15. \end{cases}$$

Из второго уравнения следует, что $b_1q^2 > 0$, так как $1 + q^2 > 0$, поэтому

$$\begin{cases} b_1q^2 = 5, \\ b_1q^2(1+q^2) = 15; \end{cases} \iff \begin{cases} q^2 = 2, \\ b_1 = \dfrac{5}{2}. \end{cases}$$

О т в е т. $\dfrac{5}{2}$.

П р и м е р 3. (Биол-91.3) Время, затрачиваемое велосипедистом на прохождение каждого очередного километра пути, на одну и ту же величину больше, чем время, затраченное им на прохождение предыдущего километра. Известно, что на прохождение второго и четвёртого километров после старта он затратил в сумме 3 мин 20 с. За какое время велосипедист проехал первые 5 км после старта?

Р е ш е н и е. Пусть t_n мин – время прохождения n–го километра пути. Известно, что $t_n = t_{n-1} + \tau$, где τ – постоянная величина, то есть t_n является арифметической прогрессией с разностью τ. Известно, что $t_2 + t_4 = 3$ мин 20 с, поэтому

$$t_2 + t_4 = t_1 + \tau + t_1 + 3\tau = 2t_1 + 4\tau = 2(t_1 + 2\tau) = 3\frac{1}{3} \iff t_1 + 2\tau = \frac{5}{3};$$

время, затраченное на прохождение 5 км после старта:

$$t_1 + t_2 + t_3 + t_4 + t_5 = \frac{2t_1 + (5-1)\tau}{2}\cdot 5 = 5(t_1 + 2\tau) = 5\cdot\frac{5}{3} = \frac{25}{3} = 8\frac{1}{3}.$$

О т в е т. 8 мин 20 с.

З а м е ч а н и е. При формулировании ответа рекомендуется сохранять обозначения и наименования, предложенные в условии.

Задачи

1. (ЕГЭ) Сумма второго, девятого и десятого члена арифметической прогрессии равна 60. Найти седьмой член этой прогрессии.

2. (ЕГЭ) В геометрической прогрессии (b_n) известно, что $S_6 = 63$, $q = -0,5$. Найти b_1.

3. (ЕГЭ) В арифметической прогрессии (a_n) $a_{87} = -36$, $a_{89} = 142$. Найти a_{88}.

4. (ЕГЭ) В геометрической прогрессии $(a_n > 0)$ известно, что $a_{n+m} = 27$, $a_{m-n} = 12$. Найти a_m.

5. (ЕГЭ) Вычислить $\dfrac{1+2+2^2+...+2^{13}}{1+2+2^2+...+2^6}$.

6. (ЕГЭ) Вычислить $180 \cdot 1,3(4)$.

7. (ЕГЭ) Вычислить сумму геометрической прогрессии $S = 1 + \dfrac{1}{6} + \dfrac{1}{36} + ...$

8. (Физ-79.2) Седьмой член арифметической прогрессии равен 21, а сумма первых семи членов этой прогрессии равна 105. Найти первый член и разность этой прогрессии.

9. (Экон-87.2) В магазине продано 12 тонн орехов трёх сортов по цене соответственно 2 руб., 4 руб. и 6 руб. за 1 кг на общую сумму 42 тыс. руб. Известно, что количества тонн проданных орехов соответственно первого, второго и третьего сортов образуют арифметическую прогрессию. Сколько тонн орехов каждого сорта продано в магазине?

10. (ВМК-88.1) Найти сумму первых двадцати членов арифметической прогрессии, если известно, что сумма третьего, седьмого, четырнадцатого и восемнадцатого членов этой прогрессии равна 10.

11. (ИСАА-93.2) Сумма третьего и пятого членов арифметической прогрессии равна 8. Найти сумму первых семи членов этой прогрессии.

12. (ВМК-96.1) Числа a, b, c и d являются последовательными членами геометрической прогрессии. Известно, что $a+d = 10$, $a \cdot d = 7$. Найти $b^3 + c^3$.

13. (Георг-91.3) Числа a_1, a_2, a_3 образуют арифметическую прогрессию, а квадраты этих чисел (в том же порядке) образуют геометрическую прогрессию. Найти a_1, a_2, a_3, если известно, что $a_1 + a_2 + a_3 = 21$.

14. (Физ-92.5) Найти первый член и разность арифметической прогрессии, если известно, что пятый и девятый члены дают в сумме 40, а сумма седьмого и тринадцатого членов равна 58.

15. (ВМК-95(1).1) В арифметической прогрессии с отличной от нуля разностью сумма членов с четвёртого по четырнадцатый включительно равна 77. Найти номер того члена прогрессии, который равен 7.

16. (Хим-89.2) Последовательность чисел $a_1, a_2, a_3, \ldots$ является арифметической прогрессией. Известно, что $a_1 + a_5 + a_{15} = 3$. Найти $a_5 + a_9$.

17. (Почв-95.1) Первый член арифметической прогрессии в два раза больше первого члена геометрической прогрессии и в пять раз больше второго члена геометрической прогрессии. Четвёртый член арифметической прогрессии составляет 50 % от второго члена арифметической прогрессии. Найти первый член арифметической прогрессии, если известно, что второй её член больше третьего члена геометрической прогрессии на 36.

18. (М/м-95(1).1) Найти первый член геометрической прогрессии, если известно, что третий член этой прогрессии равен (-10), а его квадрат в сумме с седьмым членом дает утроенный пятый член.

19. (Псих-97.3) В возрастающей геометрической прогрессии сумма первого и последнего её членов равна 164, а произведение второго и предпоследнего членов равно 324. Найти последний член прогрессии.

20. (ВМК-79.1) Даны арифметическая и геометрическая прогрессии. В арифметической прогрессии первый член равен 3, разность равна 6. В геометрической прогрессии первый член равен 3, знаменатель равен $\sqrt{2}$. Выяснить, что больше: сумма первых шести членов арифметической прогрессии или сумма первых восьми членов геометрической прогрессии?

21. (М/м-93(1).2) Сумма первых пяти членов геометрической прогрессии равна её первому члену, умноженному на 5, а сумма первых пятнадцати членов равна 100. Найти сумму первого, шестого и одиннадцатого членов этой прогрессии.

22. (Филол-75.4) Найти сумму корней уравнения $\cos 2x + \operatorname{tg}^2 x = \dfrac{1 - 3\cos^3 x}{\cos^2 x}$, принадлежащих отрезку $1 \le x \le 50$.

4.3. Скорость, движение и время

Теоретический материал

В этом разделе собраны задачи на движение. При составлении систем для таких задач обычно не требуется никаких особых математических знаний. Требуется лишь здравый смысл и знание того, что

$$\text{расстояние} = \text{скорость} \cdot \text{время}.$$

Примеры решения задач

Пример 1. (Геогр-89.2) Из пункта A в пункт B, находящийся на расстоянии 12 км от пункта A, по горной дороге со скоростью 6 км/час поднимается в гору пешеход. Одновременно с ним из пункта A в пункт B выехал автобус. Доехав до пункта B менее чем за один час, автобус поехал обратно навстречу пешеходу и встретил его через 12 минут после начала движения из пункта B. Найти скорость автобуса на подъёме, если известно, что она в 2 раза меньше его скорости на спуске.

Решение. Пусть x км/ч – скорость автобуса на подъёме, a км – расстояние от пункта A до места встречи пешехода с автобусом на его обратном пути. Запишем условие одновременного начала движения и встречи:

$$\frac{a}{6} = \frac{12}{x} + \frac{12-a}{2x},$$

время движения автобуса от пункта B до встречи с пешеходом:

$$\frac{12-a}{2x} = \frac{12}{60}$$

и ограничение времени движения автобуса от пункта A до пункта B:

$$0 < \frac{12}{x} < 1 \quad \Longleftrightarrow \quad x > 12.$$

Из полученной системы найдём x:

$$\begin{cases} \dfrac{12-a}{2x} = \dfrac{1}{5}, \\ \dfrac{a}{6} = \dfrac{12}{x} + \dfrac{12-a}{2x}, \\ x > 12; \end{cases} \quad \Longleftrightarrow \quad \begin{cases} a = 12 - \dfrac{2}{5}x, \\ ax = 3(36-a), \\ x > 12; \end{cases} \quad \Longrightarrow \quad \begin{cases} x^2 - 27x + 180 = 0, \\ x > 12; \end{cases}$$

откуда $x = 12$ (не подходит) или $x = 15$ (подходит).

Ответ. 15 км/ч.

Пример 2. (М/м-97.3) Из пункта A в пункт B со скоростью 80 км/ч выехал автомобиль, а через некоторое время с постоянной скоростью выехал второй. После остановки на 20 минут в пункте B второй автомобиль поехал с той же скоростью назад, через 48 км встретил первый автомобиль, шедший навстречу, и был на расстоянии 120 км от B в момент прибытия в B первого автомобиля. Найти расстояние от A до места первой встречи автомобилей, если $AB = 480$ км.

Решение. *Первый способ.* Пусть второй автомобиль выехал со скоростью x км/ч из A через τ часов после первого автомобиля. Первая встреча произошла на расстоянии a км от A при обгоне вторым автомобилем первого:

$$\frac{a}{80} = \frac{a}{x} + \tau;$$

встреча двух автомобилей после разворота второго:

$$\frac{480-48}{80} = \frac{480+48}{x} + \tau + \frac{20}{60};$$

прибытие первого автомобиля в B:

$$\frac{48}{80} = \frac{120-48}{x}.$$

Из третьего уравнения получаем $x = 120$ км/ч. Тогда из второго уравнения находим $\tau = \dfrac{2}{3}$ часа и, подставляя всё в первое уравнение, получаем

$$a\left(\frac{1}{80} - \frac{1}{120}\right) = \frac{2}{3} \quad \iff \quad a = 160.$$

Второй способ: если отсчитывать время с момента первой встречи, то получим систему из двух уравнений с двумя неизвестными:

$$\begin{cases} \dfrac{480 - a - 48}{80} = \dfrac{480 - a + 48}{x} + \dfrac{20}{60}, \\[2ex] \dfrac{48}{80} = \dfrac{72}{x}; \end{cases}$$

откуда $a = 160$.

Ответ. 160 км.

Пример 3. (Геол-95(1).5) Поезд, идущий с постоянной скоростью из пункта A в пункт B, был задержан у семафора на 16 мин. Расстояние от семафора до пункта B равно 80 км. При каких значениях первоначальной скорости поезд прибудет в пункт B не позже запланированного срока, если после задержки он увеличил скорость на 10 км/ч?

Решение. Пусть x км/ч – первоначальная скорость поезда. Для того чтобы поезд прибыл не позднее расписания, необходимо, чтобы фактическое время в пути от семафора до пункта B не превышало планового, то есть

$$\frac{16}{60} + \frac{80}{x+10} \le \frac{80}{x} \quad \iff \quad \frac{1}{15} \le \frac{200}{x(x+10)},$$

откуда с учётом $x > 0$ получаем

$$x^2 + 10x - 3000 \le 0 \quad \iff \quad -60 \le x \le 50 \quad \Longrightarrow \quad x \in (0; 50].$$

Ответ. Не более 50 км/ч.

Задачи

1. (ЕГЭ) Велосипедист каждую минуту проезжает на 800 м меньше, чем мотоциклист, поэтому на путь в 30 км он затратил времени на 2 ч больше, чем мотоциклист. Сколько километров в час проезжал мотоциклист?

2. (ЕГЭ) Моторная лодка прошла 10 км по озеру и 4 км против течения реки, затратив на весь путь 1 ч. Найдите собственную скорость лодки, если скорость течения реки равна 3 км/ч.

3. (ЕГЭ) Два пешехода отправляются одновременно навстречу друг другу из двух пунктов, расстояние между которыми равно 50 км, и встречаются через 5 ч. Определите скорость первого пешехода, если его скорость на 2 км/ч больше, чем у второго.

4. (Почв-82.1) Из пункта A в пункт B отправился скорый поезд. Одновременно навстречу ему из B в A вышел товарный поезд, который встретился со скорым через $2/3$ часа после отправления. Расстояние между пунктами A и B равно 80 км, поезда двигались с постоянными скоростями. С какой скоростью двигался скорый поезд, если 40 км он шел на $3/8$ часа дольше, чем товарный поезд шел 5 км?

5. (Геогр-78.1) Пароход, отчалив от пристани A, спустился вниз по течению реки на 60 км до устья впадающего в реку притока и поднялся вверх по притоку (против течения) на 20 км до пристани B. Весь путь от A до B пароход прошёл за 7 часов. Скорость течения реки и скорость течения притока равны 1 км/ч. Найти собственную скорость парохода. (Собственная скорость – скорость в неподвижной воде.)

6. (Филол-99.1) Расстояние в 160 км между пунктами А и Б автомобиль проехал со средней скоростью 40 км/ч. Часть пути по ровной дороге он ехал со скоростью 80 км/ч, а другую часть, по бездорожью, со скоростью 20 км/ч. Какое расстояние автомобиль проехал по ровной дороге?

7. (Геогр-95.2) Теплоход затратил 5 часов на путь вниз по течению реки от пункта A до пункта B. На обратный путь против течения он затратил 8 часов 20 минут. Найти скорость теплохода, если путь от A до B равен 100 километрам.

8. (ВМК-97.1) Пункты A, B и C расположены на реке в указанном порядке вниз по течению реки. Расстояние между A и B равно 4 км, а между B и C – 14 км. В 12^{00} из пункта B отплыла лодка и отправилась в A. Достигнув пункта A, она сразу же повернула и в 14^{00} того же дня прибыла в пункт C. Скорость течения реки равна 5 км/ч. Найти скорость лодки в стоячей воде.

9. (Хим-78.2) Из пункта A в пункт B выехал грузовой автомобиль. Через 1 час из пункта A в пункт B выехал легковой автомобиль, который прибыл в пункт B одновременно с грузовым автомобилем. Если бы грузовой и легковой автомобили одновременно выехали из пунктов A и B навстречу друг другу, то они бы встретились через 1 час 12 минут после выезда. Сколько времени провел в пути от A до B грузовой автомобиль?

10. (Экон.К-77.2) Из пункта A в пункт B выехал велосипедист. В тот момент, когда он проехал $1/4$ пути между A и B, из B в A выехал мотоциклист, который, прибыв в A, не задерживаясь, повернул обратно и одновременно с велосипедистом прибыл в B. Время движения мотоциклиста до первой встречи с велосипедистом равно времени движения мотоциклиста из A в B. Считая скорости мотоциклиста при движении из A в B и из B в A различными, найти, во сколько раз скорость мотоциклиста при движении из A в B больше скорости велосипедиста.

11. (Геогр-99.3) По реке из пункта A в пункт B выплыл катер. Одновременно из пункта B в пункт A выплыла моторная лодка. Пройдя четверть пути от B к A, лодка встретилась с катером. Катер, достигнув пункта B, повернул обратно и прибыл в пункт A одновременно с лодкой. Во сколько раз скорость катера больше скорости лодки?

12. (Биол-86.3) Из пункта A по одному и тому же маршруту одновременно выехали грузовик и легковой автомобиль. Скорость легкового автомобиля постоянна и составляет $6/5$ скорости грузовика. Через 30 минут вслед за ними из того же пункта выехал мотоциклист со скоростью 90 км/час. Найти скорость легкового автомобиля, если известно, что мотоциклист догнал грузовик на один час раньше, чем легковой автомобиль.

13. (Хим-79.3) От пристани A вниз по течению реки одновременно отплыли пароход и плот. Пароход, доплыв до пристани B, расположенной в 324 км от пристани A, простоял там 18 часов и отправился назад в A. В тот момент, когда он находился в 180 км от A, второй пароход, отплывший из A на 40 часов позднее первого, нагнал плот, успевший к этому времени проплыть 144 км. Считая, что скорость течения реки постоянная, скорость плота равна скорости течения реки, а скорости пароходов в стоячей воде постоянны и равны между собой, определить скорости пароходов и течения реки.

14. (Геол-79.4) Расстояние между двумя городами скорый поезд проходит на 4 часа быстрее товарного и на 1 час быстрее пассажирского. Известно, что скорость товарного поезда составляет $5/8$ скорости пассажирского и на 50 км/ч меньше скорости скорого. Найти скорости товарного и скорого поездов.

4.4. Работа и производительность

Теоретический материал

При составлении систем уравнений для задач этого раздела надо помнить, что

$$\text{работа} = \text{производительность} \cdot \text{время}.$$

Примеры решения задач

Пример 1. (Геол-85.3) Первый рабочий изготовил 60 деталей на три часа быстрее второго. За сколько часов второй рабочий изготовит 90 деталей, если, работая вместе, они изготовили за один час 30 деталей?

Решение. Пусть x и y деталей в час – производительности 1-го и 2-го рабочих соответственно; $t = 90/y$ часов – искомая величина. Из условия получаем

$$\begin{cases} \dfrac{60}{x} = \dfrac{60}{y} - 3, \\ \dfrac{30}{x+y} = 1; \end{cases} \iff \begin{cases} x + y = 30, \\ 20\left(\dfrac{1}{y} - \dfrac{1}{x}\right) = 1. \end{cases}$$

Выразив x из первого уравнения и подставив его во второе, получим уравнение $y^2 - 70y + 600 = 0$ с корнями $y = 60$ и $y = 10$. Корень $y = 60 > 30$ не подходит, а при $y = 10$ искомое время $t = 9$ часов.

Ответ. 9 часов.

Задачи

1. (ЕГЭ) Для распечатки 302 страниц были использованы две копировальные машины. Первая работала 8 минут, вторая 10 минут. Сколько страниц в минуту печатает первая машина, если первая печатает в минуту на 4 страницы больше, чем вторая?

2. (ЕГЭ) Двое рабочих изготавливают по одинаковому количеству деталей. Первый выполнил эту работу за 6 ч, второй за 4 ч, так как изготовлял в час на 14 деталей больше первого. Сколько деталей изготовил второй рабочий?

3. (ЕГЭ) На строительстве стены первый каменщик работал 5 дней один. Затем к нему присоединился второй, и они вместе закончили работу через 4 дня. Известно, что первому каменщику потребовалось бы на выполнение этой работы на 5 дней больше, чем второму. За сколько дней может выстроить эту стену первый каменщик, работая один?

4. (ЕГЭ) За определенное время на заводе собирают 90 автомобилей. Первые 3 часа на заводе выполняли установленную норму, а затем стали собирать на 1 автомобиль в час больше. Поэтому за час до срока уже было собрано 95 автомобилей. Сколько автомобилей в час должны были собирать на заводе?

5. (Геол-93.3) Для рытья котлована выделили два экскаватора. После того, как первый проработал 2 ч, его сменил второй, который за 3 ч закончил работу. Всю работу один второй экскаватор выполнил бы на 4 ч быстрее, чем один первый экскаватор. За какое время выроют котлован оба экскаватора, работая вместе?

6. (Фил-79.4) Три автоматические линии выпускают одинаковую продукцию, но имеют разную производительность. Производительность всех трёх одновременно действующих линий в 1,5 раза выше производительности первой и второй линий, работающих одновременно. Сменное задание для первой линии вторая и третья линии, работая одновременно, могут выполнить на 4 ч 48 мин быстрее, чем его выполняет первая линия; это же задание вторая линия выполняет на 2 ч быстрее по сравнению с первой линией. Найти время выполнения первой линией своего сменного задания.

7. (Геол-98(1).4) Первая бригада выполняет работу на 2 часа быстрее второй бригады и на 7 часов медленнее, чем обе бригады, работающие одновременно. Выполнят ли бригады, работающие одновременно, эту работу быстрее, чем за 7 часов 57 минут?

4.5. Проценты, формула сложного процента

Примеры решения задач

Пример 1. (Геол-94.7) Технология изготовления дискет состоит из четырёх этапов. На каждом из них увеличивается содержание кремния на определённое количество процентов по отношению к результату предыдущего этапа: на первом этапе – на 25 %, на втором этапе – на 20 %, на третьем этапе – на 10 %, на четвёртом этапе – на 8 %. На сколько процентов в результате увеличится содержание кремния?

Р е ш е н и е. Напомним, что одним процентом называется одна сотая часть числа. Пусть S — исходное содержание кремния, R – содержание кремния после четырёх этапов.

Фраза «величина S увеличилась на $p\,\%$» означает, что значение величины S возросло на $\frac{S}{100}\cdot p$ и стало равно $S+\frac{S}{100}\cdot p = S\left(1+\frac{1}{100}\cdot p\right)$, то есть увеличение на $p\,\%$ даёт увеличение в $\left(1+\frac{1}{100}\cdot p\right)$ раз. Тогда после четырёх этапов:

$$R = S\left(1+\frac{25}{100}\right)\cdot\left(1+\frac{20}{100}\right)\cdot\left(1+\frac{10}{100}\right)\cdot\left(1+\frac{8}{100}\right) = S\cdot\frac{5}{4}\cdot\frac{6}{5}\cdot\frac{11}{10}\cdot\frac{27}{25} = S\cdot 1,782.$$

Содержание кремния увеличилось на $\left(\frac{R-S}{S}\right)\cdot 100\,\% = 78,2\,\%$.

О т в е т. $78,2\,\%$.

П р и м е р 2. (ИСАА-95.3) На счёт, который вкладчик имел в начале первого квартала, начисляется в конце этого квартала r_1 процентов, а на ту сумму, которую вкладчик имел на счету в начале второго квартала, начисляются в конце этого квартала r_2 процентов, причём $r_1 + r_2 = 150$. Вкладчик положил на счёт в начале первого квартала некоторую сумму и снял в конце того же квартала (после начисления процентов) половину этой суммы. При каком значении r_1 счёт вкладчика в конце второго квартала окажется максимально возможным?

Р е ш е н и е. Пусть вкладчик в начале первого квартала вложил S денег, тогда на начало второго перейдёт сумма

$$S\left(1+\frac{r_1}{100}\right) - \frac{S}{2} = S\left(\frac{r_1}{100}+\frac{1}{2}\right);$$

в конце второго квартала на счету будет

$$S\left(\frac{r_1}{100}+\frac{1}{2}\right)\cdot\left(1+\frac{r_2}{100}\right) = S\left(\frac{r_1}{100}+\frac{1}{2}\right)\cdot\left(1+\frac{150-r_1}{100}\right) =$$

$$= S\left(\frac{r_1}{100}+\frac{1}{2}\right)\left(\frac{5}{2}-\frac{r_1}{100}\right);$$

рассмотрим функцию

$$f(r_1) = S\left(\frac{r_1}{100}+\frac{1}{2}\right)\left(\frac{5}{2}-\frac{r_1}{100}\right) =$$

$$= \frac{S}{100^2}(r_1+50)(250-r_1) = S\cdot 10^{-4}(-r_1^2+200r_1+12500).$$

Наибольшее значение $f(r_1)$ принимает в вершине параболы, которая задаётся квадратным трёхчленом относительно r_1. Абсцисса вершины $r_1 = 100\,\%$.

О т в е т. $100\,\%$.

Задачи

1. (ЕГЭ) Некоторое число уменьшили на 20 %. На сколько процентов надо увеличить результат, чтобы получить первоначальное число?

2. (ЕГЭ) Цену товара повысили на 50 %, а затем снизили на 50 %. Как изменится цена товара?

3. (ЕГЭ) Магазин в первый день продал 40 % имеющихся овощей. За второй день он продал 80 % овощей, проданных в первый день. В третий день оставшиеся 28 кг. Сколько килограммов овощей было в магазине первоначально?

4. (ЕГЭ) Цена изделия составляла 1000 рублей и была снижена сначала на 10 %, а затем еще на 20 %. Какова окончательная цена товара?

5. (ЕГЭ) Цену товара повысили на 25 %, затем новую цену повысили еще на 10 % и, наконец, после перерасчёта произвели повышение цены еще на 12 %. На сколько процентов повысили первоначальную цену товара?

6. (ЕГЭ) Сумма двух чисел равна 1100. Найдите наибольшее из них, если 6 % одного из них равны 5 % другого.

7. (ЕГЭ) Найдите первоначальную сумму вклада (в рублях), если после истечения трёх лет она выросла на 765,1 рубля при 2 % годовых.

8. (Соц-00.2) В городе N в течение 2 лет наблюдался рост числа жителей. Во втором году процент роста числа жителей города N увеличился на 1 по сравнению с процентом роста числа жителей в первом году. Найти процент роста числа жителей в первом году, если известно, что он на 5,2 меньше, чем процент роста населения за два года.

9. (Геол-98.4) Из цистерны в бассейн сначала перелили 50 % имеющейся в цистерне воды, затем еще 100 литров, затем еще 5 % от остатка. При этом количество воды в бассейне возросло на 31 %. Сколько литров воды было в цистерне, если в бассейне первоначально было 2000 литров воды?

10. (Экон.М-95.4) В первый год разработки месторождения было добыто 100 тыс. тонн железной руды. В течение нескольких последующих лет годовая добыча руды увеличивалась на 25 % по сравнению с каждым предшествующим годом, а затем на протяжении последующих 3 лет поддерживалась на достигнутом уровне. Общий объём добытой руды за все время добычи составил 850 тыс. тонн. Сколько лет разрабатывалось месторождение?

11. (Геол-96.6) В двух банках в конце года на каждый счёт начисляется прибыль: в первом банке – 60 % к текущей сумме на счёте, во втором – 40 % к текущей сумме на счёте. Вкладчик в начале года часть имеющихся у него денег положил в первый банк, а остальные деньги – во второй банк, с таким расчётом, чтобы через два года суммарное количество денег на обоих счетах удвоилось. Какую долю денег вкладчик положил в первый банк?

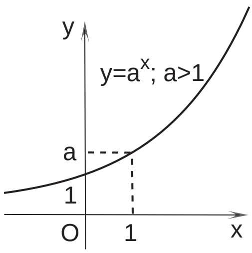
5. Стандартные показательные и логарифмические уравнения и неравенства

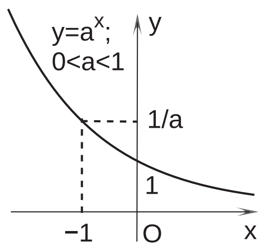
5.1. Преобразование логарифмических выражений. Сравнение логарифмических и показательных значений

Теоретический материал

Функция $y = a^x$, где $x \in \mathbb{R}$, $a > 0$, $a \neq 1$, называется *показательной*. Областью её определения являются все $x \in \mathbb{R}$. Областью её значений являются все $y > 0$, причём $\forall y > 0$ найдётся только одно значение x, на котором он достигается.

Если $a > 1$, то $y = a^x$ возрастает; если $0 < a < 1$, то $y = a^x$ убывает.





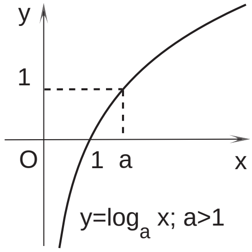
При преобразовании выражений с показательными функциями необходимо помнить свойства степеней с вещественными показателями:

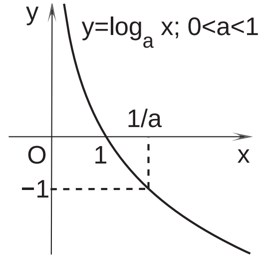
$$a^{x+y} = a^x \cdot a^y, \quad a^{x-y} = \frac{a^x}{a^y}, \quad a^{xy} = (a^x)^y = (a^y)^x, \quad x, y \in \mathbb{R}, \quad a > 0;$$

$$(ab)^x = a^x \cdot b^x, \quad \left(\frac{a}{b}\right)^x = \frac{a^x}{b^x}, \quad x \in \mathbb{R}, \quad a > 0, \quad b > 0;$$

$$a^0 = 1, \quad a^1 = a.$$

Функция $y = \log_a x$, где $x > 0$, $a > 0$, $a \neq 1$, называется *логарифмической*. Напомним, что число b называется *логарифмом* числа $c > 0$ по основанию $a > 0$, $a \neq 1$, если $a^b = c$; обозначение: $b = \log_a c$, где $c > 0$, $a > 0$, $a \neq 1$.





Показательная и логарифмическая функции являются взаимно обратными.

Областью значения логарифмической функции является вся числовая ось, причём $\forall y \in \mathbb{R}$ найдётся только один $x > 0$, на котором y достигается.

Если $a > 1$, то $y = \log_a x$ возрастает; если $0 < a < 1$, то $y = \log_a x$ убывает.

При преобразовании выражений с логарифмическими функциями необходимо помнить свойства логарифмов:

$$\log_a xy = \log_a |x| + \log_a |y|, \quad a > 0, \quad a \neq 1, \quad xy > 0;$$

$$\log_a \frac{x}{y} = \log_a |x| - \log_a |y|, \quad a > 0, \quad a \neq 1, \quad \frac{x}{y} > 0;$$

$$\log_a x^y = y \log_a x, \quad a > 0, \quad a \neq 1, \quad x > 0;$$

$$\log_a x^{2n} = 2n \log_a |x|, \quad a > 0, \quad a \neq 1, \quad n \in \mathbb{Z}, \quad x \neq 0;$$

$$\log_{a^y} x = \frac{1}{y} \log_a x, \quad a > 0, \quad a \neq 1, \quad x > 0, \quad y \neq 0;$$

$$\log_a x = \frac{\log_c x}{\log_c a}, \quad a > 0, \quad a \neq 1, \quad c > 0, \quad c \neq 1, \quad x > 0.$$

Последняя формула называется формулой перехода к новому основанию и имеет полезные следствия:

$$\log_a x = \frac{1}{\log_x a}, \quad a > 0, \quad a \neq 1, \quad x > 0, \quad x \neq 1;$$

$$x^{\log_a y} = y^{\log_a x}, \quad a > 0, \quad a \neq 1, \quad x > 0, \quad y > 0.$$

Напомним также то, что

$$\log_a a = 1, \quad \log_a 1 = 0, \quad a > 0, \quad a \neq 1; \qquad \lg x = \log_{10} x, \quad \ln x = \log_e x;$$

и основное логарифмическое тождество:

$$a = b^{\log_b a}, \quad a > 0, \quad b > 0, \quad b \neq 1.$$

Примеры решения задач

Пример 1. (Биол-98.1) Вычислить $\log_{b^3 \sqrt[7]{a^5}} \dfrac{\sqrt[7]{a}}{b\sqrt{b}}$, если $\log_b a = \sqrt{3}$.

Решение. Перейдём к основанию b:

$$\log_{b^3 \sqrt[7]{a^5}} \frac{\sqrt[7]{a}}{b\sqrt{b}} = \frac{\log_b \dfrac{\sqrt[7]{a}}{b\sqrt{b}}}{\log_b \left(b^3 \sqrt[7]{a^5}\right)} = \frac{\log_b \sqrt[7]{a} - \log_b b\sqrt{b}}{\log_b b^3 + \log_b \sqrt[7]{a^5}} = \frac{\dfrac{1}{7}\log_b a - \dfrac{3}{2}}{3 + \dfrac{5}{7}\log_b a} = \frac{\dfrac{1}{7}\sqrt{3} - \dfrac{3}{2}}{3 + \dfrac{5}{7}\sqrt{3}} =$$

$$= \frac{2\sqrt{3} - 21}{42 + 10\sqrt{3}} = \frac{2 - 7\sqrt{3}}{14\sqrt{3} + 10} = \frac{(2 - 7\sqrt{3})(7\sqrt{3} - 5)}{2(49 \cdot 3 - 25)} = \frac{49\sqrt{3} - 157}{244}.$$

Ответ. $\dfrac{49\sqrt{3} - 157}{244}$.

Замечание. В принципе, полученную в ходе решения дробь $\dfrac{2\sqrt{3} - 21}{42 + 10\sqrt{3}}$ тоже можно считать ответом. Проведённые преобразования носят сугубо формальный характер.

Пример 2. (Геогр-97(1).1) Найти область определения функции $y = \sqrt{x^2 - x - 2} + \log_{3+x}(9 - x^2)$.

Решение. Область определения данной функции складывается из неотрицательности подкоренной функции, положительности функции, стоящей под знаком логарифма, положительности основания логарифма и неравенства основания единице:

$$\begin{cases} x^2 - x - 2 \geq 0, \\ 9 - x^2 > 0, \\ 3 + x > 0, \\ 3 + x \neq 1; \end{cases} \iff \begin{cases} x \in (-\infty; -1] \cup [2; +\infty), \\ -3 < x < 3, \\ x > -3, \\ x \neq -2; \end{cases} \iff (-3; -2) \cup (-2; -1] \cup [2; 3).$$

Ответ. $(-3; -2) \cup (-2; -1] \cup [2; 3)$.

Пример 3. (Биол-94.2) Какое из двух чисел больше: $\sqrt{11}$ или $9^{\frac{1}{2}\log_3\left(1+\frac{1}{9}\right) + \frac{3}{2}\log_8 2}$? Ответ должен быть обоснован.

Решение. Преобразуем показатель степени второго числа:

$$\frac{1}{2}\log_3\left(1 + \frac{1}{9}\right) + \frac{3}{2}\log_8 2 = \frac{1}{2}\log_3\frac{10}{9} + \frac{1}{2}\log_2 2 = \frac{1}{2}\log_3\frac{10}{9} + \frac{1}{2} =$$

$$= \frac{1}{2}\left(\log_3\frac{10}{9} + \log_3 3\right) = \frac{1}{2}\log_3\frac{10}{3}.$$

Значит, второе число имеет вид $9^{\frac{1}{2}\log_3\frac{10}{3}} = 3^{\log_3\frac{10}{3}} = \dfrac{10}{3}$. Сравниваем:

$$\begin{array}{rcl} \sqrt{11} & \vee & \dfrac{10}{3} \\ 3\sqrt{11} & \vee & 10 \\ 99 & \vee & 100. \end{array}$$

Поскольку $99 < 100$ и не было преобразований, меняющих знак неравенства, полученный результат соответствует знаку неравенства между исходными числами.

Ответ. Второе больше.

Задачи

1. (ЕГЭ) Вычислить $\log_2 \log_2 \sqrt[4]{2}$.
2. (ЕГЭ) Вычислить $\log_6 8 - \log_6 2 + \log_6 9$.
3. (ЕГЭ) Указать значение выражения $\left(\sqrt{6}\right)^{\frac{2}{\log_9 6}}$.
4. (ЕГЭ) Указать значение выражения $\log_6 \dfrac{36}{a}$, если $\log_6 a = -6$.
5. (ЕГЭ) Указать значение выражения $\lg 15$, если $\lg 2 = a$, $\lg 3 = b$.

6. (ЕГЭ) Упростить $6^{-0,5+\log_6 \frac{\sqrt{3}}{2}} - 2^{-0,5+\log_2 0,5}$.

7. (ЕГЭ) Найти значение выражения $\dfrac{2\log_3^2 2 - \log_3^2 18 - (\log_3 2)\log_3 18}{2\log_3 2 + \log_3 18}$.

8. (ЕГЭ) Вычислить $\log_{3\sqrt{2}} \dfrac{\sqrt[3]{18}}{\sqrt{12}}$, если $\log_9 6 = a$.

9. (ВМК-84.1) Известно, что $\log_a b = 7$. Найти $\log_b (a^2 b)$.

10. (Экон-90.1) Имеют ли общие точки область значений функции $y = \sqrt{3} + 2\sqrt{2}x - 2x^2$ и промежуток $[\log_3 15; +\infty)$? Ответ обоснуйте.

11. (ВМК-83.1) Найти область определения функции $y = \sqrt{16 - x^2}\log_2 (x^2 - 5x + 6)$.

12. (Геол-89.1) Определить, какое из чисел больше: $2\log_{\frac{1}{2}} \dfrac{1}{5}$ или $3\log_8 26$? Ответ должен быть обоснован.

13. (ВМК-82.1) Какое из чисел больше: $\sqrt{8}$ или $2^{2\log_2 5 + \log_{\frac{1}{2}} 9}$?

14. (Геол.ОГ-85.1) Определить, какое из чисел больше: $2^{\log_3 5} - 0,1$ или $5^{\log_3 2}$? Результат обосновать.

15. (Физ-82.3) Известно, что $\log_b a = \sqrt{3}$. Вычислить $\log_{\frac{\sqrt{a}}{b}} \dfrac{\sqrt[3]{a}}{\sqrt{b}}$.

16. (М/м-92.3) Даны числа p и q такие, что $p = \log_z y$, $q = \log_x y$. Найти число $\log_{\left(\frac{xz}{y^2}\right)^3} \sqrt{xyz}$, считая, что оно определено.

5.2. Простейшие показательные уравнения и неравенства, равносильные преобразования

Теоретический материал

При решении простейшего уравнения с показательными функциями

$$a^{f(x)} = a^{g(x)}, \quad a > 0$$

возможны два случая:

1) $a = 1$, $\quad f(x)$ и $g(x)$ определены;
2) $a > 0,\ a \neq 1$, $\quad f(x) = g(x)$.

При решении простейшего неравенства с показательными функциями

$$a^{f(x)} > a^{g(x)}, \quad a > 0$$

возможны следующие варианты:

1) $a > 1$, $\quad f(x) > g(x)$;
2) $a = 1$, $\quad$ нет решений;

3) $0 < a < 1, \quad f(x) < g(x)$.

Заметим, что в случае нестрогого неравенства между показательными функциями нестрогим становится и неравенство между $f(x)$ и $g(x)$, причём случай $a = 1$ рассматривается отдельно.

Особого внимания заслуживает ситуация, когда в качестве основания степени выступает не число, а функция $a(x)$:

$$a(x)^{f(x)} = a(x)^{g(x)} \iff \left[\begin{array}{l} \begin{cases} a(x) = 1, \\ f(x) \text{ и } g(x) \text{ определены}; \end{cases} \\ \begin{cases} a(x) \in (0;1) \cup (1;+\infty), \\ f(x) = g(x); \end{cases} \end{array} \right. \tag{24}$$

$$a(x)^{f(x)} > a(x)^{g(x)} \iff \left[\begin{array}{l} \begin{cases} a(x) > 1, \\ f(x) > g(x); \end{cases} \\ \begin{cases} 0 < a(x) < 1, \\ f(x) < g(x); \end{cases} \end{array} \right. \tag{25}$$

$$a(x)^{f(x)} \geq a(x)^{g(x)} \iff \left[\begin{array}{l} \begin{cases} a(x) > 1, \\ f(x) \geq g(x); \end{cases} \\ \begin{cases} a(x) = 1, \\ f(x) \text{ и } g(x) \text{ определены}; \end{cases} \\ \begin{cases} 0 < a(x) < 1, \\ f(x) \leq g(x). \end{cases} \end{array} \right. \tag{26}$$

Отметим, что требование $a(x) > 0$ фактически накладывается определением показательной функции.

Примеры решения задач

Пример 1. (Экон.М-97.1) Решить уравнение $3^{|x|} = 5^{x^2+3x}$.

Решение. Используя основное логарифмическое тождество, приведем правую часть уравнения к показательному виду с основанием 3 и воспользуемся монотонностью показательной функции:

$$3^{|x|} = \left(3^{\log_3 5}\right)^{x^2+3x} \iff 3^{|x|} = 3^{(x^2+3x)\log_3 5} \iff |x| = x(x+3)\log_3 5.$$

Модуль будем раскрывать по определению.

1) Значение $x = 0$ является решением.

2) При $x > 0$ уравнение примет вид

$$x = x(x+3)\log_3 5 \iff (x+3)\log_3 5 = 1 \iff x = \log_5 3 - 3.$$

Это значение отрицательно и, следовательно, не подходит.

3) При $x<0$ получим

$$-x = x(x+3)\log_3 5 \iff (x+3)\log_3 5 = -1 \iff x = -\log_5 3 - 3 < 0.$$

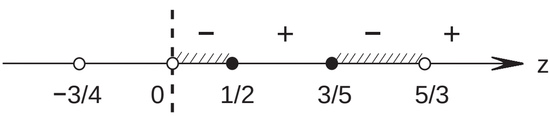
О т в е т. $0;\ -\log_5 3-3$.

П р и м е р 2. (Геол.ОГ-77.1) Решить неравенство $\dfrac{11\cdot 3^{x-1}-31}{4\cdot 9^x - 11\cdot 3^{x-1}-5} \ge 5$.

Р е ш е н и е. Обозначив $z=3^x>0$, получаем

$$\frac{11z-93}{12z^2-11z-15}\ge 5 \iff \frac{10z^2-11z+3}{12z^2-11z-15}\le 0.$$

Отметим нули числителя $z=\dfrac{1}{2}$, $z=\dfrac{3}{5}$ и нули знаменателя $z=-\dfrac{3}{4}$, $z=\dfrac{5}{3}$ на числовой прямой и применим метод интервалов.



Получим $\left[\begin{array}{l} z\le \dfrac{1}{2};\\ \dfrac{3}{5}\le z<\dfrac{5}{3}; \end{array}\right.$ следовательно, $\left[\begin{array}{l} x\le \log_3\dfrac{1}{2};\\ \log_3\dfrac{3}{5}\le x<\log_3\dfrac{5}{3}. \end{array}\right.$

О т в е т. $(-\infty;-\log_3 2]\cup\left[\log_3\dfrac{3}{5};\log_3\dfrac{5}{3}\right)$.

П р и м е р 3. (ВМК-72.1) Решить уравнение $9^{1-(x-1)^2}-12\cdot 3^{-(x-1)^2}+1=0$.

Р е ш е н и е. Обозначив $z=3^{-(x-1)^2}>0$, получим

$$9z^2-12z+1=0 \iff z=\frac{2\pm\sqrt{3}}{3}.$$

Возвращаемся к переменной x:

$$3^{-(x-1)^2}=\frac{2\pm\sqrt{3}}{3} \iff -(x-1)^2=\log_3(2\pm\sqrt{3})-1 \iff$$

$$\iff \left[\begin{array}{l} (x-1)^2=1-\log_3(2-\sqrt{3})=1+\log_3(2+\sqrt{3});\\ (x-1)^2=1-\log_3(2+\sqrt{3})<0 \text{ — нет решений;} \end{array}\right. \iff$$

$$\iff x-1=\pm\sqrt{1+\log_3(2+\sqrt{3})} \iff x=1\pm\sqrt{1+\log_3(2+\sqrt{3})}.$$

О т в е т. $1\pm\sqrt{1+\log_3(2+\sqrt{3})}$.

Задачи

1. (ЕГЭ) Решить уравнение $3^x = 27 \cdot \sqrt[4]{9}$.
2. (ЕГЭ) Решить неравенство $\left(\frac{2}{5}\right)^{x+1} < 1$.
3. (ЕГЭ) Решить неравенство $7^x - \left(\sqrt{7}\right)^x - 6 > 0$.
4. (ЕГЭ) Решить неравенство $(0,1)^{4x^2-2x-2} \geq (0,1)^{2x-3}$.
5. (Экон-83.1) Решить уравнение $2^{x+2} \cdot 5^{x+2} = 2^{3x} \cdot 5^{3x}$.
6. (Физ-95(2).1) Решить уравнение $2^{x-1} \cdot 3^x = 0,5 \cdot 6^{2-x}$.
7. (Хим-98.1) Решить уравнение $4^x + 2^x - 2 = 0$.
8. (Геол-84.1) Решить уравнение $3 \cdot 9^{x+1} - 6 \cdot 3^x - 1 = 0$.
9. (Хим-90.1) Решить уравнение $4^x + 3 \cdot 2^{x+2} = 64$.
10. (Физ-82.4) Решить неравенство $5^x - 3^{x+1} > 2(5^{x-1} - 3^{x-2})$.
11. (Геол-80.1) Решить неравенство $7^{-x} - 3 \cdot 7^{1+x} > 4$.
12. (ВМК-77.1) Решить неравенство $2^{2x+1} - 21 \cdot \left(\frac{1}{2}\right)^{2x+3} + 2 \geq 0$.
13. (Физ-80.4) Решить неравенство $2^{x-1} > \left(\frac{1}{16}\right)^{\frac{1}{x}}$.
14. (Физ-97(1).5) Решить неравенство $2^{x-3} < \dfrac{2}{8^{\frac{1}{x}}}$.
15. (Геол-97(1).4) Решить неравенство $\left(\frac{2}{3}\right)^{2x^2} > 2,25^{x^2-10}$.
16. (ЕГЭ.С) Решить неравенство $(1,25)^{1-x} < (0,64)^{2(1+\sqrt{x})}$.
17. (Физ-96(1).3) Решить уравнение $3^{2x} = (0,6^x + 2) \cdot 25^x$.
18. (Биол-91.1) Решить уравнение $4^{\sqrt{x}+1,5} - 13 \cdot 2^{\frac{x-1}{\sqrt{x}-1}} + 20 = 0$.
19. (Физ-96.3) Решить уравнение $5^{\frac{x}{2}} - 5^{2-\frac{3x}{2}} = 24 \cdot 5^{-\frac{x}{2}}$.
20. (Физ-94(1).3) Решить уравнение $5^{\sqrt{x}} - 5^{3-\sqrt{x}} = 20$.
21. (Физ-96(2).5) Решить неравенство $4^{x-0,5} + 2^{x+1} - 16 < 0$.
22. (М/м-75.1) Решить неравенство $98 - 7^{x^2+5x-48} \geq 49^{x^2+5x-49}$.
23. (Геогр-73.4) Найти решения уравнения $3^{x^2+4x} = \dfrac{1}{25}$, удовлетворяющие неравенству $x > -3$.

24. (Почв-92.3) Решить уравнение $\dfrac{9^x - 82\cdot 3^x + 162 - 3^{\frac{x}{2}+2}}{3^{\frac{x}{2}} - 9} = -9$.

25. (Хим-97.2) Решить неравенство $(\sqrt{2}+1)^x + 1 < 2(\sqrt{2}-1)^x$.

26. (Хим-95(1).3) Решить неравенство $2^{\frac{1-x}{x}} < 2^{\frac{1-2x}{2x}} + 1$.

27. (Физ-85.4) При каждом значении параметра a решить уравнение $4^x - 2a(a+1)\cdot 2^{x-1} + a^3 = 0$.

5.3. Простейшие логарифмические уравнения и неравенства, равносильные преобразования

Теоретический материал

При решении простейших уравнений и неравенств с логарифмами используются переходы к системам и совокупностям равносильных условий, что нередко упрощает последовательность преобразований, а также часто избавляет от необходимости находить условия на область допустимых значений переменной.

Например, простейшее логарифмическое уравнение

$$\log_a f(x) = \log_a g(x), \quad a > 0, \quad a \neq 1$$

равносильно условиям $f(x) = g(x) > 0$. Заметим, что из двух требуемых условий $f(x) > 0$ и $g(x) > 0$ при выполнении равенства $f(x) = g(x)$ достаточно выбрать лишь одно (удобнее выбрать более простое).

При решении простейшего логарифмического неравенства

$$\log_a f(x) > \log_a g(x), \quad a > 0, \quad a \neq 1$$

возможны два случая:
1) $a > 1, \qquad f(x) > g(x) > 0;$
2) $0 < a < 1, \quad 0 < f(x) < g(x).$

Особого внимания заслуживает ситуация, когда в качестве основания логарифма выступает не число, а функция $a(x)$:

$$\log_{a(x)} f(x) = \log_{a(x)} g(x) \quad \Longleftrightarrow \quad \begin{cases} f(x) = g(x) > 0, \\ a(x) \in (0;1) \cup (1;+\infty); \end{cases} \tag{27}$$

причём из двух требуемых условий $f(x) > 0$ и $g(x) > 0$ достаточно выбрать одно (более простое);

$$\log_{a(x)} f(x) > \log_{a(x)} g(x) \quad \Longleftrightarrow \quad \left[\begin{array}{l} \begin{cases} a(x) > 1, \\ f(x) > g(x) > 0; \end{cases} \\ \begin{cases} 0 < a(x) < 1, \\ 0 < f(x) < g(x); \end{cases} \end{array} \right. \tag{28}$$

$$\log_{a(x)} f(x) \geq \log_{a(x)} g(x) \quad \Longleftrightarrow \quad \left[\begin{array}{l} \begin{cases} a(x) > 1, \\ f(x) \geq g(x) > 0; \end{cases} \\ \begin{cases} 0 < a(x) < 1, \\ 0 < f(x) \leq g(x). \end{cases} \end{array}\right. \tag{29}$$

Естественно, что любые другие задачи с логарифмическими функциями так или иначе сводятся к решению приведённых простейших уравнений и неравенств.

Примеры решения задач

Пример 1. (Геол-74.2) Решить уравнение
$\log_{16}(x^2-2x-3)^2 - 2\log_{16}(x^2+x-2) = \dfrac{1}{2}$.

Решение. Представим 16 в виде 2^4, вынесем все степени за знаки логарифмов и, домножив равенство на 2, получим

$$\log_2|x^2-2x-3| - \log_2(x^2+x-2) = 1 \quad \Longleftrightarrow$$

$$\Longleftrightarrow \quad \begin{cases} |x^2-2x-3| = 2(x^2+x-2), \\ |x^2-2x-3| > 0; \end{cases} \quad \Longleftrightarrow \quad \begin{cases} |(x+1)(x-3)| = 2(x^2+x-2), \\ x \neq -1 \quad \text{и} \quad x \neq 3. \end{cases}$$

Решим полученное уравнение с модулем.

1) При $x \in (-\infty;-1) \cup (3;+\infty)$ получим

$$x^2-2x-3 = 2x^2+2x-4 \quad \Longleftrightarrow \quad x^2+4x-1=0 \quad \Longleftrightarrow \quad x = -2 \pm \sqrt{5}.$$

Подходит $x = -2-\sqrt{5}$.

2) При $x \in (-1;3)$ получим

$$-x^2+2x+3 = 2x^2+2x-4 \quad \Longleftrightarrow \quad 3x^2 = 7 \quad \Longleftrightarrow \quad x = \pm\sqrt{\frac{7}{3}}.$$

Подходит $x = \sqrt{\dfrac{7}{3}}$.

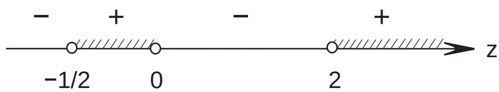
Ответ. $-2-\sqrt{5}$; $\sqrt{\dfrac{7}{3}}$.

Пример 2. (Геол-98.5) Решить неравенство $\log_{\frac{1}{3}}(x-2) > \dfrac{1}{\log_{\frac{1}{3}}(x-2)} + \dfrac{3}{2}$.

Решение. Обозначив $z = \log_{\frac{1}{3}}(x-2)$, получаем

$$z > \frac{1}{z} + \frac{3}{2} \quad \Longleftrightarrow \quad \frac{2z^2-3z-2}{z} > 0 \quad \Longleftrightarrow \quad \frac{(2z+1)(z-2)}{z} > 0,$$

откуда $-\dfrac{1}{2} < z < 0$ или $z > 2$.



Следовательно,

$$\left[\begin{array}{l} -\dfrac{1}{2} < \log_{\frac{1}{3}}(x-2) < 0; \\ \log_{\frac{1}{3}}(x-2) > 2; \end{array}\right. \iff \left[\begin{array}{l} \sqrt{3} > x-2 > 1; \\ 0 < x-2 < \dfrac{1}{9}; \end{array}\right. \iff \left[\begin{array}{l} 3 < x < \sqrt{3}+2; \\ 2 < x < \dfrac{19}{9}. \end{array}\right.$$

О т в е т. $\left(2; \dfrac{19}{9}\right) \cup (3; \sqrt{3}+2)$.

П р и м е р 3. (Георг-94.3) Решить неравенство $\log_x(2-x-x^2) > 0$.

Р е ш е н и е. *Первый способ.* Исходное неравенство эквивалентно совокупности

$$\left[\begin{array}{l} \begin{cases} x > 1, \\ 2-x-x^2 > 1; \end{cases} \\ \begin{cases} 0 < x < 1, \\ 0 < 2-x-x^2 < 1; \end{cases} \end{array}\right. \iff \left[\begin{array}{l} \begin{cases} x > 1, \\ x^2+x-1 < 0; \end{cases} \\ \begin{cases} 0 < x < 1, \\ x^2+x-2 < 0, \\ x^2+x-1 > 0; \end{cases} \end{array}\right. \iff$$

$$\iff \left[\begin{array}{l} \begin{cases} x > 1, \\ \dfrac{-1-\sqrt{5}}{2} < x < \dfrac{-1+\sqrt{5}}{2}; \end{cases} \\ \begin{cases} 0 < x < 1, \\ -2 < x < 1, \\ x \in \left(-\infty; \dfrac{-1-\sqrt{5}}{2}\right) \bigcup \left(\dfrac{-1+\sqrt{5}}{2}; +\infty\right); \end{cases} \end{array}\right. \iff \frac{\sqrt{5}-1}{2} < x < 1.$$

Второй способ. Из положительности функции под логарифмом следует $2-x-x^2 > 0$, то есть $-2 < x < 1$. Значит, основание логарифма меньше 1 и исходное неравенство равносильно системе

$$\begin{cases} 2-x-x^2 < 1, \\ 0 < x < 1; \end{cases} \iff \begin{cases} x \in \left(-\infty; \dfrac{-1-\sqrt{5}}{2}\right) \bigcup \left(\dfrac{-1+\sqrt{5}}{2}; +\infty\right), \\ 0 < x < 1; \end{cases}$$

откуда $\dfrac{\sqrt{5}-1}{2} < x < 1$.

О т в е т. $\left(\dfrac{\sqrt{5}-1}{2}; 1\right)$.

Задачи

1. (ЕГЭ) Найти произведение корней уравнения $2\log_4^2 x + \log_4 x - 1 = 0$.
2. (ЕГЭ) Решить неравенство $\log_3 \dfrac{x-7}{2x-5} < 0$.
3. (Соц-98.2) Решить уравнение $\log_2(x^2-5) = \dfrac{3}{2}\log_{\sqrt{8}}(1-x)$.
4. (Почв-77.2) Решить уравнение $2\lg\left(x+\dfrac{1}{2}\right) - \lg(x-1) = \lg\left(x+\dfrac{5}{2}\right) + \lg 2$.
5. (Геол-00.1) Решить неравенство $\log_{\sqrt{2}}(5x-4) \leq 8$.
6. (Геол.ОГ-83.3) Решить неравенство $\log_3(5x^2+6x+1) \leq 0$.
7. (Псих-80.4) Решить неравенство $\log_{\frac{1}{2}}\left(x-\dfrac{1}{2}\right) + \log_{\frac{1}{2}}(x-1) \geq 1$.
8. (ВМК-86.1) Решить неравенство $\log_3(x+2) + \log_3(x-4) - 1 \leq 0$.
9. (М/м-87.2) Решить неравенство $\log_{\sqrt{6}-\sqrt{2}}(x^2+4x+11-4\sqrt{3}) < 2$.
10. (ВМК-90.1) Решить неравенство $\log_{x^2+4} 8 < 1$.
11. (Биол-96.3) Решить неравенство $1 + \log_{\frac{1}{4}}(\log_3(4-x)) > 0$.
12. (Геол-00(1).3) Решить неравенство $\log_2(x-3)(x+2) + \log_{\frac{1}{2}}(x+2)(x-6) \leq 2$.
13. (Филол-98.3) Решить уравнение $\dfrac{\log_5(-2x)}{\log_5(x+1)} = 2$.
14. (Геол.ОГ-82.3) Решить неравенство
$\log_3((x+2)(x+4)) + \log_{\frac{1}{3}}(x+2) < \dfrac{1}{2}\log_{\sqrt{3}} 7$.
15. (Хим-97(1).2) Решить уравнение $\log_x(3x-2) = 2$.
16. (Физ-97(1).3) Решить уравнение $\log_9 \dfrac{x^2}{4} + \log_3(x+5) = 1$.
17. (Биол-80.2) Решить уравнение $2(\log_2 x)^2 - 3\log_2 \dfrac{x}{4} - 11 = 0$.
18. (Геол.ОГ-76.1) Найти все решения уравнения $4 + \log_2 x^2 = \log_x 64$.
19. (Хим-98(1).2) Решить уравнение $\log_4 x + 2\log_x 4 = 3$.
20. (Филол-89.3) Решить уравнение $\log_{2x+2}(2x^2-8x+6) = 2$.
21. (Почв-71.5) Решить неравенство $2\log_{\frac{1}{2}}(x-2) - \log_{\frac{1}{2}}(x^2-x-2) \geq 1$.
22. (Почв-96(1).2) Решите уравнение $\log_{4x-x^2} x = \log_{12-3x} x$.
23. (ВМК-96(1).2) Решить уравнение $\log_{2x+3}(x-2)^2 = \log_{\frac{x}{6}+\frac{1}{2}}(x-2)^2$.

24. (Почв-95(1).3) Решить неравенство $\dfrac{1}{\log_x 2} - \log_2 \dfrac{1}{x} \le 2$.
25. (Геогр-72.3) Найти все значения x, для которых справедливо неравенство $2\log_7 x - \log_x 49 < 3$.
26. (ЕГЭ) Решить неравенство $\log_{x-1}(x+2) \le 0$.
27. (ВМК-73.2) Решить неравенство $\log_{\frac{x^2-18x+91}{90}}\left(5x - \dfrac{3}{10}\right) \le 0$.
28. (Филос-92.2) Решить неравенство $\log_x(x^2 - x^3 + 21x) \ge 3$.
29. (М/м-97(1).2) Решить неравенство $\log_{x+1}\dfrac{x^2+3x-4}{2x-4} \le 1$.
30. (Экон-98.1) Решить неравенство $\log_{\frac{x^2-x}{5}}\dfrac{x-1}{2} \ge 0$.
31. (Геол-75.2) Решить неравенство $\log_{9x^2-6x+1}\dfrac{1}{9x^2-18x+8} < -1$.
32. (Геол-73.4) Решить неравенство $\log_{2x-x^2}\left(x - \dfrac{3}{2}\right)^4 > 0$.

5.4. Смешанные задачи

Данный раздел рекомендуется изучать только после детального ознакомления с предыдущими базовыми разделами. В противном случае рекомендуется либо отложить его изучение, либо вернуться к изучению предыдущих разделов до достижения необходимого уровня знаний.

1. (ЕГЭ) Решить уравнение $10^{1-\lg x} = 100^{2+\lg x}$.
2. (ВМК-85.1) Решить систему уравнений $\begin{cases} 6^x - 2\cdot 3^y = 2, \\ 6^x \cdot 3^y = 12. \end{cases}$
3. (Хим-92.1) Решить уравнение $x + 1 + \log_{\frac{1}{3}}(-2 + 3^{-x}) = 0$.
4. (М/м-76.1) Решить уравнение $\log_{\sin(-x)}\left(\sin\dfrac{x}{2} + \sin\dfrac{3x}{2}\right) = 1$.
5. (ИСАА-99.1) Решить уравнение $\lg^2(x-2)^2 = 3^{2\log_3\sqrt{2}} \cdot \dfrac{\log_5(2-x)}{\log_5 10}$.
6. (Экон.К-80.1) Решить неравенство $\log_5(26 - 3^x) > 2$.
7. (Биол-71.1) Решить уравнение $\log_{\frac{1}{4}} 2x \cdot \log_{\frac{1}{4}}\left(x\cos^5\dfrac{\pi}{3}\right) = 7\cos\dfrac{2\pi}{3} \cdot \log_{\frac{1}{4}} 2$.
8. (М/м-95.2) Решить неравенство $\dfrac{2}{\frac{2}{\log_2 x} - 1} > -3$.

9. (М/м-88.2) Решить неравенство $\log_{5x-4x^2} 4^{-x} > 0$.

10. (Физ-87.2) Решить уравнение $4^{\sin x} + 2^{5-2\sin x} = 18$.

11. (М/м-94(2).2) Решить систему $\begin{cases} 2^x + 2y = 1, \\ 3y - 6y^2 = 2^{x-1}. \end{cases}$

12. (Почв-83.3) Решить систему уравнений $\begin{cases} x + 2^{y+1} = 3, \\ 4x + 4^y = 32. \end{cases}$

13. (Почв-75.3) Решить уравнение $x + 27^{\frac{5}{2}|\log_{9\sqrt{3}} \sqrt[3]{x}|} = \dfrac{10}{3}$.

14. (Биол-74.2) Решить уравнение $5 \cdot \left(\dfrac{1}{25}\right)^{\sin^2 x} + 4 \cdot 5^{\cos 2x} = 25^{\frac{\sin 2x}{2}}$.

15. (Физ-89.3) Решить уравнение $\log_2 (x+4) + 2\log_2 \sqrt{x} = 5$.

16. (Геол-97(1).2) Решить уравнение $2 - \log_3 x = \log_3 \left(\dfrac{5}{3}|x| + 2\right)$.

17. (Физ-94(1).2) Решить уравнение $\dfrac{1}{6}\log_2 (x-2) - \dfrac{1}{3} = \log_{\frac{1}{8}} \sqrt{3x-5}$.

18. (Физ-83.3) Решить неравенство $\dfrac{3}{2}\log_4 \sqrt[3]{x} - \dfrac{1}{2}\log_2 x > 1$.

19. (Геол-83.3) Решить неравенство $\log_{\sin \frac{\pi}{3}} (x^2 - 3x + 2) \geq 2$.

20. (ИСАА-94.2) Решить уравнение $2^{x \log_2 7} \cdot 7^{x^2+x} = 1$.

21. (Филол-91.2) Решить уравнение $\log_2 (5 \cdot 2^x + 3) = 2x + 1$.

22. (Биол-87.3) Решить неравенство $\dfrac{3\log_{0,5} x}{2 - \log_{0,5} x} \geq 2\log_{0,5} x + 1$.

23. (Почв-70.2) Решить уравнение $\log_8 (4^{x^2-1} - 1) + \dfrac{2}{3} = \log_8 (2^{x^2+2} - 7)$.

24. (ВМК-76.2) Решить систему уравнений $\begin{cases} 3 \cdot 2^x - \log_2 y = 2, \\ 2^x \cdot \log_2 y = 1. \end{cases}$

25. (Геол-96(1).3) Решить уравнение $\log_{\frac{x-1}{|2x-3|}} (x-1) = 2$.

26. (Геол-97.5) Решить неравенство $11^{\log_{\frac{1}{11}} \log_7 x} < 7^{\log_{\frac{1}{7}} \log_{11} x}$.

27. (Физ-81.4) Решить неравенство $5^{\log_3 \frac{2}{x+2}} < 1$.

28. (Почв-98.4) Решить систему $\begin{cases} y^x = 3y, \\ 2\log_3 y + \log_y 3 = 3x. \end{cases}$

6. Линейные и однородные тригонометрические уравнения, системы тригонометрических уравнений, использование ограниченности тригонометрических функций

6.1. Линейные тригонометрические уравнения, метод вспомогательного аргумента

Теоретический материал

Линейным тригонометрическим уравнением называется уравнение вида

$$a\sin x + b\cos x = c.$$

Если хотя бы один из коэффициентов a или b равен нулю, то решение не требует специальных подходов, поэтому будем рассматривать случай $a \neq 0$, $b \neq 0$.

Если свободный член линейного уравнения равен нулю, то оно принимает вид

$$a\sin x + b\cos x = 0$$

и называется *линейным однородным тригонометрическим уравнением.*

Для его решения рассматривается возможность $\cos x = 0$, которая при подстановке в уравнение приводит к условию $\sin x = 0$, противоречащему в данном случае основному тригонометрическому тождеству

$$\sin^2 x + \cos^2 x = 1.$$

Делением на $\cos x$ (где $\cos x \neq 0$) исходное уравнение приводится к виду

$$a\operatorname{tg} x = -b,$$

после чего оно решается как простейшее тригонометрическое уравнение.

Для преобразования левой части линейного тригонометрического уравнения

$$a\sin x + b\cos x = c$$

используется способ введения дополнительного угла (*метод вспомогательного аргумента*); обе части уравнения делятся на величину $\sqrt{a^2+b^2} \neq 0$:

$$\frac{a}{\sqrt{a^2+b^2}}\sin x + \frac{b}{\sqrt{a^2+b^2}}\cos x = \frac{c}{\sqrt{a^2+b^2}};$$

из свойств тригонометрических функций заключаем, что найдётся единственный угол φ такой, что

$$\sin\varphi = \frac{b}{\sqrt{a^2+b^2}}, \quad \cos\varphi = \frac{a}{\sqrt{a^2+b^2}}, \quad \varphi \in [0; 2\pi),$$

после чего уравнение переписывается в виде

$$\sin x\cos\varphi + \cos x\sin\varphi = \frac{c}{\sqrt{a^2+b^2}}, \quad \text{то есть} \quad \sin(x+\varphi) = \frac{c}{\sqrt{a^2+b^2}},$$

а затем решается как простейшее тригонометрическое уравнение.

При решении уравнения

$$\frac{a}{\sqrt{a^2+b^2}}\sin x+\frac{b}{\sqrt{a^2+b^2}}\cos x=\frac{c}{\sqrt{a^2+b^2}}$$

можно в качестве дополнительного угла использовать $\psi\in[0;2\pi)$ такой, что $\cos\psi=\dfrac{b}{\sqrt{a^2+b^2}}$, $\sin\psi=\dfrac{a}{\sqrt{a^2+b^2}}$; тогда уравнение примет вид

$$\cos(x-\psi)=\frac{c}{\sqrt{a^2+b^2}}.$$

Выбор пути сведения к простейшему уравнению относительно синуса или косинуса зависит от конкретных условий рассматриваемой задачи, однако возможность введения дополнительного угла обусловлена основным тригонометрическим тождеством, то есть $\forall p,q\in\mathbb{R}$ таких, что $p^2+q^2=1$, найдётся такой угол $\varphi\in[0;2\pi)$, что $\sin\varphi=p$, $\cos\varphi=q$.

Таким образом,

$$a\sin x+b\cos x=\sqrt{a^2+b^2}\sin(x+\varphi)=\sqrt{a^2+b^2}\cos(x-\psi).$$

Примеры решения задач

Пример 1. (Геол-85.4) Решить уравнение $3\sin x+5\cos x=\sqrt{17}$.

Решение. Уравнение является линейным и решается методом вспомогательного аргумента:

$$\frac{3}{\sqrt{34}}\sin x+\frac{5}{\sqrt{34}}\cos x=\frac{\sqrt{17}}{\sqrt{34}},\quad\text{где}\quad\sqrt{34}=\sqrt{3^2+5^2};$$

существует угол $\varphi\in[0;2\pi)$ такой, что $\sin\varphi=\dfrac{3}{\sqrt{34}}$, $\cos\varphi=\dfrac{5}{\sqrt{34}}$, поэтому $\cos(x-\varphi)=\dfrac{1}{\sqrt{2}}\iff x-\varphi=\pm\dfrac{\pi}{4}+2\pi n,\ n\in\mathbb{Z}\iff x=\operatorname{arctg}\dfrac{3}{5}\pm\dfrac{\pi}{4}+2\pi n,\ n\in\mathbb{Z}$.

Замечание. В качестве значения дополнительного угла можно использовать любой из вариантов:

$$\varphi=\arcsin\frac{3}{\sqrt{34}}=\arccos\frac{5}{\sqrt{34}}=\operatorname{arctg}\frac{3}{5}=\operatorname{arcctg}\frac{5}{3}.$$

Ответ. $\operatorname{arctg}\dfrac{3}{5}\pm\dfrac{\pi}{4}+2\pi n,\ n\in\mathbb{Z}$.

Задачи

1. (ЕГЭ) Найти сумму корней уравнения $\sin x-\sqrt{3}\cos x=0$, принадлежащих промежутку $[-\pi;\pi]$. Ответ записать в градусах.

2. (Физ-96(1).1) Решить уравнение $1-\sin 5x=\cos 5x$.
3. (Хим-82.1) Решить уравнение $\sqrt{3}\sin 2x-\cos 2x=\sqrt{3}$.
4. (Хим-79.1) Решить уравнение $\sin 2x=1+\sqrt{2}\cos x+\cos 2x$.
5. (Физ-94(2).2) Решить уравнение $5\cos x+2\sin x=3$.
6. (Физ-98(2).1) Решить уравнение $\cos 4x-\sin 3x\cos x+\cos 2x=0$.
7. (Филол-94.1) Решить уравнение $\dfrac{2}{\pi}\sin x+\cos 19\pi=\cos x$.
8. (Псих-81.3) Найти все решения уравнения $\cos 7x-\sqrt{3}\sin 7x=-\sqrt{2}$, удовлетворяющие условию $0,4\pi<x<\dfrac{6\pi}{7}$.
9. (Геол-79.3) Найти все числа A, при каждом из которых уравнение $5\sin x+2\cos x=A$ имеет решение.
10. (Экон-92.1) Вычислить $\log_{11/25}|\sin 3\beta|+\log_{11/25}|\sin\beta|$, если $\sin\left(\beta-\dfrac{\pi}{4}\right)+\cos\left(\beta-\dfrac{\pi}{4}\right)=\sqrt{\dfrac{2}{5}}$.
11. (Геол-90.3) Решить уравнение $1-(2\cos x+\sqrt{3})\cdot\operatorname{ctg} x=2\sin x$.
12. (Геол.ОГ-79.6) Найти все значения параметра α, при каждом из которых уравнение $x^2+\dfrac{2x}{\sqrt{\sin\alpha}}+\dfrac{1}{\cos\alpha}+2\sqrt{2}=0$ имеет единственное решение.
13. (Геогр-00(1).3) Решить уравнение $3(\sin x-1)+4\cos x+\cos\left(2x+4\operatorname{arctg}\dfrac{1}{2}\right)=0$.

6.2. Однородные тригонометрические уравнения второй степени, замена тригонометрических выражений

Теоретический материал

Тригонометрическое уравнение вида

$$a_0\sin^n x+a_1\sin^{n-1}x\cos x+\ldots+a_{n-1}\sin x\cos^{n-1}x+a_n\cos^n x=0,$$

где $n\in\mathbb{N}$, все $a_k\in\mathbb{R}$, $k=0,1,2,\ldots,n$, называется *однородным тригонометрическим уравнением n-ой степени* (все слагаемые имеют одинаковую степень относительно $\sin x$ и $\cos x$).

При $a_0=0$ левая часть уравнения раскладывается на множители. Приравнивая их к нулю, приходим к совокупности уравнений: $\cos x=0$ и однородному уравнению меньшей степени.

При $a_0\neq 0$ рассматривается возможность $\cos x=0$, которая при подстановке в уравнение приводит к условию $\sin x=0$, противоречащему в данном случае основному тригонометрическому тождеству

$$\sin^2 x+\cos^2 x=1.$$

Значит, в однородном уравнении $\cos x \neq 0$, и обе части уравнения можно разделить на $\cos^n x$. Полученное уравнение

$$a_0 \operatorname{tg}^n x + a_1 \operatorname{tg}^{n-1} x + ... + a_{n-1} \operatorname{tg} x + a_n = 0$$

является уравнением n-ой степени относительно $\operatorname{tg} x$.

Однородное уравнение второй степени имеет вид

$$a_0 \sin^2 x + a_1 \sin x \cos x + a_2 \cos^2 x = 0.$$

Пусть $a_0 \neq 0$. Делением на $\cos^2 x \neq 0$ (в соответствии с общим приёмом решения однородных тригонометрических уравнений) оно приводится к виду

$$a_0 \operatorname{tg}^2 x + a_1 \operatorname{tg} x + a_2 = 0,$$

после чего решается как квадратное уравнение относительно $\operatorname{tg} x$.

При ненулевой правой части тригонометрического уравнения

$$a_0 \sin^2 x + a_1 \sin x \cos x + a_2 \cos^2 x = a_3$$

полезно использовать представление $a_3 = a_3 \cdot 1 = a_3 \left(\sin^2 x + \cos^2 x\right)$, что позволяет привести уравнение к однородному:

$$(a_0 - a_3) \sin^2 x + a_1 \sin x \cos x + (a_2 - a_3) \cos^2 x = 0.$$

Заметим, что если при решении линейного уравнения

$$a \sin x + b \cos x = c$$

воспользоваться формулами двойного угла и основным тригонометрическим тождеством, то уравнение запишется в виде

$$2a \sin\frac{x}{2}\cos\frac{x}{2} + b\left(\cos^2\frac{x}{2} - \sin^2\frac{x}{2}\right) = c\left(\cos^2\frac{x}{2} + \sin^2\frac{x}{2}\right) \iff$$

$$\iff (b+c)\sin^2\frac{x}{2} - 2a\sin\frac{x}{2}\cos\frac{x}{2} + (c-b)\cos^2\frac{x}{2} = 0,$$

то есть линейное уравнение свелось к однородному уравнению второй степени.

Замечание. Для сведения линейного уравнения к уравнению второй степени можно также воспользоваться формулами универсальной тригонометрической подстановки:

$$\sin x = \frac{2\operatorname{tg}\frac{x}{2}}{1+\operatorname{tg}^2\frac{x}{2}}, \quad \cos x = \frac{1-\operatorname{tg}^2\frac{x}{2}}{1+\operatorname{tg}^2\frac{x}{2}}.$$

Следует отметить, что эти формулы сужают область определения исходного уравнения, так как не допускают случая $\cos\dfrac{x}{2} = 0$, то есть $x = \pi + 2\pi k,\ k \in \mathbb{Z}$; поэтому серию $x = \pi + 2\pi n,\ n \in \mathbb{Z}$ как возможное решение следует проверять отдельно, до применения этих формул. В результате получим

$$a \sin x + b \cos x = c \iff (b+c)\operatorname{tg}^2\frac{x}{2} - 2a\operatorname{tg}\frac{x}{2} + c - b = 0,$$

то есть задача свелась к решению того же квадратного уравнения для $\operatorname{tg}\dfrac{x}{2}$, что и в предыдущем случае.

Можно, наоборот, свести однородное уравнение второй степени к линейному. Для этого надо использовать формулы понижения степени

$$\sin^2 x = \frac{1-\cos 2x}{2}, \quad \cos^2 x = \frac{1+\cos 2x}{2}.$$

В этом случае однородное уравнение

$$a_0 \sin^2 x + a_1 \sin x \cos x + a_2 \cos^2 x = 0$$

примет вид

$$a_0 \frac{1-\cos 2x}{2} + a_1 \frac{\sin 2x}{2} + a_2 \frac{1+\cos 2x}{2} = 0 \iff$$
$$\iff a_1 \sin 2x + (a_2 - a_0)\cos 2x = -a_0 - a_2.$$

Полученное уравнение можно решить методом вспомогательного аргумента.

Примеры решения задач

Пример 1. (Геол.ОГ-85.4) Решить уравнение $5\sin^2 x - 4\sin x \cos x - \cos^2 x = 4$.

Решение. Представив правую часть в виде

$$4 = 4\left(\sin^2 x + \cos^2 x\right) = 4\sin^2 x + 4\cos^2 x,$$

после приведения подобных слагаемых получим

$$\sin^2 x - 4\sin x \cos x - 5\cos^2 x = 0.$$

Если $\cos x = 0$, то из уравнения следует, что и $\sin x = 0$, а это противоречит основному тригонометрическому тождеству, поэтому решения уравнения $\cos x = 0$ не являются решениями рассматриваемого уравнения, и обе его части можно поделить на $\cos^2 x \neq 0$:

$$\operatorname{tg}^2 x - 4\operatorname{tg} x - 5 = 0 \iff \left[\begin{array}{l} \operatorname{tg} x = -1; \\ \operatorname{tg} x = 5; \end{array}\right. \iff \left[\begin{array}{l} x = -\dfrac{\pi}{4} + \pi n, \ n \in \mathbb{Z}; \\ x = \operatorname{arctg} 5 + \pi m, \ m \in \mathbb{Z}. \end{array}\right.$$

Ответ. $-\dfrac{\pi}{4} + \pi n, \ \operatorname{arctg} 5 + \pi m; \ n, m \in \mathbb{Z}$.

Пример 2. (Геогр-76.3) Решить уравнение $1 - \sin 2x = -(\sin x + \cos x)$.

Решение. Обозначив $z = \sin x + \cos x$, получаем $z^2 = 1 + \sin 2x$, то есть $\sin 2x = z^2 - 1$. Исходное уравнение после подстановки принимает вид

$$1 - (z^2 - 1) = -z \iff z^2 - z - 2 = 0 \iff \left[\begin{array}{l} z = -1; \\ z = 2. \end{array}\right.$$

Возвращаясь к переменной x, получаем совокупность уравнений и применяем метод вспомогательного аргумента:

$$\left[\begin{array}{l} \sin x + \cos x = -1; \\ \sin x + \cos x = 2; \end{array}\right. \iff \left[\begin{array}{l} \cos\left(x - \dfrac{\pi}{4}\right) = -\dfrac{1}{\sqrt{2}}; \\ \cos\left(x - \dfrac{\pi}{4}\right) = \sqrt{2} > 1. \end{array}\right.$$

Второе уравнение решений не имеет; из первого

$$x - \frac{\pi}{4} = \pm\frac{3\pi}{4} + 2\pi n,\ n \in \mathbb{Z}, \quad \text{то есть} \quad \left[\begin{array}{l} x = \pi + 2\pi n,\ n \in \mathbb{Z}; \\ x = -\dfrac{\pi}{2} + 2\pi m,\ m \in \mathbb{Z}. \end{array}\right.$$

Ответ. $-\frac{\pi}{2} + 2\pi m,\ \pi + 2\pi n;\ m, n \in \mathbb{Z}$.

Замечание. Если величины $\sin x$ и $\cos x$ входят в уравнение только в виде суммы (или разности) и произведения, то с помощью замены $z = \sin x + \cos x$ (или $z = \sin x - \cos x$) исходное уравнение сводится к квадратному относительно z.

Задачи

1. (ЕГЭ) Указать число корней уравнения $6\sin^2 x + 5\sin x\cos x + 3\cos^2 x = 2$, принадлежащих промежутку $[-\pi; 0]$.
2. (Физ-91.1) Решить уравнение $8 - 7\sin 2x = 12\sin^2 x$.
3. (ИСАА-97.3) Решить уравнение $1 - 3\sin x\cos x - 5\cos^2 x = 0$.
4. (Геол.ОГ-80.1) Решить уравнение $\sin 2x = 2\sqrt{3}\cos^2 x$.
5. (Хим-94(1).2) Решить уравнение $\sin 2x + \cos^2 x = 0$.
6. (Почв-79.3) Решить уравнение $\dfrac{1+\sqrt{3}}{2}\sin 2x = (\sqrt{3}-1)\cos^2 x + 1$.
7. (ВМК-98.3) Решить уравнение $24|\cos^3 x| - 2\sin^3 x + \sin x = 0$.
8. (Хим-94.3) Решить уравнение $\sqrt{\sin 2x} = \sqrt{\cos x - \sin x - 1}$.

6.3. Системы тригонометрических уравнений

Теоретический материал

Если в системе уравнений переменные являются аргументами тригонометрических функций, то говорят о *системе тригонометрических уравнений*. При решении таких систем используются в комплексе как методы решения систем уравнений в целом, так и способы решения тригонометрических уравнений в отдельности. Наиболее часто встречаются системы, решаемые подстановкой, а также системы, сводящиеся к функциям от суммы или разности переменных.

Отдельное внимание при решении систем тригонометрических уравнений следует уделять связи или независимости целочисленных переменных в различных сериях решений.

Примеры решения задач

Пример 1. (Экон.К-79.1) Решить систему уравнений

$$\begin{cases} 4\sin y - 6\sqrt{2}\cos x = 5 + 4\cos^2 y, \\ \cos 2x = 0. \end{cases}$$

Р е ш е н и е. Из второго уравнения получим $2\cos^2 x - 1 = 0 \iff \cos x = \pm\dfrac{1}{\sqrt{2}}$. Рассмотрим два случая.

1) $\cos x = \dfrac{1}{\sqrt{2}}$. Подставим в первое уравнение:

$$4\sin y - 6 = 5 + 4(1-\sin^2 y) \iff 4\sin^2 y + 4\sin y - 15 = 0 \iff$$

$$\iff \left[\begin{aligned} &\sin y = -\frac{5}{2} < -1; \\ &\sin y = \frac{3}{2} > 1; \end{aligned}\right. \quad \text{решений нет.}$$

2) $\cos x = -\dfrac{1}{\sqrt{2}}$. Подставив в первое уравнение, получим

$$4\sin y + 6 = 5 + 4(1-\sin^2 y) \iff 4\sin^2 y + 4\sin y - 3 = 0 \iff$$

$$\iff \left[\begin{aligned} &\sin y = -\frac{3}{2} < -1; \\ &\sin y = \frac{1}{2}; \end{aligned}\right. \iff \sin y = \frac{1}{2} \iff y = (-1)^n\frac{\pi}{6} + \pi n,\ n \in \mathbb{Z}.$$

В результате решением системы являются

$$x = \pm\frac{3\pi}{4} + 2\pi m,\ m \in \mathbb{Z}; \quad y = (-1)^n\frac{\pi}{6} + \pi n,\ n \in \mathbb{Z}.$$

О т в е т. $\left(\pm\dfrac{3\pi}{4} + 2\pi m; (-1)^n\dfrac{\pi}{6} + \pi n\right)$; $m, n \in \mathbb{Z}$.

П р и м е р 2. (Геол-81.4) Решить систему уравнений $\begin{cases} \sin x \sin y = \dfrac{1}{4}, \\ 3\operatorname{tg} x = \operatorname{ctg} y. \end{cases}$

Р е ш е н и е. Преобразуем исходную систему следующим образом:

$$\begin{cases} \sin x \sin y = \dfrac{1}{4}, \\ \dfrac{3\sin x}{\cos x} = \dfrac{\cos y}{\sin y}; \end{cases} \iff \begin{cases} \sin x \sin y = \dfrac{1}{4}, \\ \cos x \cos y = 3\sin x \sin y, \\ \cos x \ne 0,\ \sin y \ne 0; \end{cases} \iff \begin{cases} \sin x \sin y = \dfrac{1}{4}, \\ \cos x \cos y = 3\cdot\dfrac{1}{4}, \\ \cos x \ne 0,\ \sin y \ne 0. \end{cases}$$

Из первых двух уравнений следует, что $\cos x \ne 0$, $\sin y \ne 0$; значит, исходная система равносильна системе $\begin{cases} \sin x \sin y = \dfrac{1}{4}, \\ \cos x \cos y = \dfrac{3}{4}. \end{cases}$ Складывая и вычитая эти уравнения, находим:

$$\begin{cases} \cos(x-y) = 1, \\ \cos(x+y) = \dfrac{1}{2}; \end{cases} \iff \begin{cases} x - y = 2\pi n, \\ x + y = \pm\dfrac{\pi}{3} + 2\pi m; \end{cases} \iff \left[\begin{aligned} &\begin{cases} x - y = 2\pi n, \\ x + y = -\dfrac{\pi}{3} + 2\pi m; \end{cases} \\ &\begin{cases} x - y = 2\pi k, \\ x + y = \dfrac{\pi}{3} + 2\pi l; \end{cases} \end{aligned}\right.$$

откуда $\begin{cases} x = -\dfrac{\pi}{6} + \pi m + \pi n, \\ y = -\dfrac{\pi}{6} + \pi m - \pi n \end{cases}$ или $\begin{cases} x = \dfrac{\pi}{6} + \pi l + \pi k, \\ y = \dfrac{\pi}{6} + \pi l - \pi k, \end{cases}$ где $n, m, k, l \in \mathbb{Z}$.

Ответ. $\left(-\dfrac{\pi}{6} + \pi(m+n); -\dfrac{\pi}{6} + \pi(m-n)\right)$, $\left(\dfrac{\pi}{6} + \pi(l+k); \dfrac{\pi}{6} + \pi(l-k)\right)$; $n, m, k, l \in \mathbb{Z}$.

Пример 3*. (Биол-79.5) Найти все пары чисел x и y, удовлетворяющие условиям $\begin{cases} (\sqrt{3}+1)(1+\cos(xy)\sin(xy)) = (\sqrt{3}+1)\sin^2(xy) + \cos(2xy), \\ x^2y^2 - y^2 + 1 = 0, \\ \dfrac{1}{x^2} + y^2 \leq 6. \end{cases}$

Решение. Из первого уравнения, используя формулы $1 = \sin^2(xy) + \cos^2(xy)$ и $\cos(2xy) = \cos^2(xy) - \sin^2(xy)$, получаем

$$(\sqrt{3}+1)\sin^2(xy) + (\sqrt{3}+1)\cos^2(xy) + (\sqrt{3}+1)\sin(xy)\cos(xy) =$$

$$= (\sqrt{3}+1)\sin^2(xy) + \cos^2(xy) - \sin^2(xy) \quad \Longleftrightarrow$$

$$\Longleftrightarrow \quad \sin^2(xy) + (\sqrt{3}+1)\sin(xy)\cos(xy) + \sqrt{3}\cos^2(xy) = 0.$$

Это однородное уравнение второй степени. Так как $\cos(xy) = 0$ не является решением, оно сводится к уравнению

$$\operatorname{tg}^2(xy) + (1+\sqrt{3})\operatorname{tg}(xy) + \sqrt{3} = 0, \quad D = (\sqrt{3}-1)^2;$$

$\operatorname{tg}(xy) = -\sqrt{3}$ или $\operatorname{tg}(xy) = -1$; значит, $xy = -\dfrac{\pi}{3} + \pi n$ или $xy = -\dfrac{\pi}{4} + \pi m$, где $n, m \in \mathbb{Z}$.

Теперь рассмотрим второе уравнение исходной системы: $x^2y^2 - y^2 + 1 = 0$. Обозначим $z = xy$ и с помощью этого уравнения выразим x и y через z. Заметим, что $y = 0$ не является решением уравнения; поделим уравнение на y^2, получим $1 = \dfrac{1}{y^2} + x^2$, откуда $x^2 = \dfrac{y^2-1}{y^2}$. Следовательно,

$$\begin{cases} y^2 = 1 + z^2, \\ x^2 = \dfrac{z^2}{1+z^2}. \end{cases}$$

Подставив эти зависимости в последнее условие системы $\dfrac{1}{x^2} + y^2 \leq 6$, получим

$$\frac{1+z^2}{z^2} + 1 + z^2 \leq 6 \quad \Longleftrightarrow \quad z^4 - 4z^2 + 1 \leq 0 \quad \Longleftrightarrow \quad 2 - \sqrt{3} \leq z^2 \leq 2 + \sqrt{3}.$$

Покажем, что при $n, m \neq 0$ в ранее полученных сериях $|z| > 2$ и, следовательно, эти значения не подходят:

1) для $z = -\dfrac{\pi}{3} + \pi n$ при $n \geq 1$ получаем $z \geq -\dfrac{\pi}{3} + \pi = \dfrac{2\pi}{3} > 2$, а при $n \leq -1$ получаем, что $z \leq -\dfrac{\pi}{3} - \pi < -2$;

2) для $z=-\dfrac{\pi}{4}+\pi m$ при $m\geq 1$ получаем $z\geq -\dfrac{\pi}{4}+\pi=\dfrac{3\pi}{4}>2$, а при $n\leq -1$ получаем, что $z\leq -\dfrac{\pi}{4}-\pi<-2$.

Следовательно, решение возможно только при $n=0$ и $m=0$. Проверим соответствующие значения z:

1) при $n=0$ получаем $z=-\dfrac{\pi}{3}$, и так как $1<\dfrac{\pi^2}{9}<2$, то $2-\sqrt{3}\leq z^2\leq 2+\sqrt{3}$;

2) при $m=0$ получаем $z=-\dfrac{\pi}{4}$, и так как $\dfrac{1}{2}<\dfrac{\pi^2}{16}<1$, то $2-\sqrt{3}\leq z^2\leq 2+\sqrt{3}$.

Окончательно получаем $\begin{cases} xy=-\dfrac{\pi}{3} \quad \text{или} \quad xy=-\dfrac{\pi}{4}, \\ x^2=\dfrac{(xy)^2}{1+(xy)^2},\ y^2=1+(xy)^2; \end{cases}$

1) если $xy=-\dfrac{\pi}{3}$, то $x^2=\dfrac{\pi^2}{\pi^2+9}$, $y^2=\dfrac{\pi^2+9}{9}$; учитывая, что x и y разных знаков, получаем $x=-\dfrac{\pi}{\sqrt{\pi^2+9}}$, $y=\dfrac{\sqrt{\pi^2+9}}{3}$; $x=\dfrac{\pi}{\sqrt{\pi^2+9}}$, $y=-\dfrac{\sqrt{\pi^2+9}}{3}$;

2) если $xy=-\dfrac{\pi}{4}$, то $x^2=\dfrac{\pi^2}{\pi^2+16}$, $y^2=\dfrac{\pi^2+16}{16}$; учитывая, что x и y разных знаков, получаем $x=-\dfrac{\pi}{\sqrt{\pi^2+16}}$, $y=\dfrac{\sqrt{\pi^2+16}}{4}$; $x=\dfrac{\pi}{\sqrt{\pi^2+16}}$, $y=-\dfrac{\sqrt{\pi^2+16}}{4}$.

Ответ. $\left(-\dfrac{\pi}{\sqrt{\pi^2+9}};\dfrac{\sqrt{\pi^2+9}}{3}\right)$, $\left(\dfrac{\pi}{\sqrt{\pi^2+9}};-\dfrac{\sqrt{\pi^2+9}}{3}\right)$, $\left(-\dfrac{\pi}{\sqrt{\pi^2+16}};\dfrac{\sqrt{\pi^2+16}}{4}\right)$, $\left(\dfrac{\pi}{\sqrt{\pi^2+16}};-\dfrac{\sqrt{\pi^2+16}}{4}\right)$.

Задачи

1. (ЕГЭ) Решить систему уравнений $\begin{cases} x-y=\dfrac{\pi}{2}, \\ \cos x-\cos y=-\sqrt{2}. \end{cases}$

   В ответе записать значение y в градусах, где $y\in[0;360^\circ]$.

2. (Геол.ОГ-71.1) Найти все решения системы $\begin{cases} \cos 2x+\sin y=\sqrt{3}\cos 30^\circ, \\ 2\cos 2x-\sin y=\sin 540^\circ. \end{cases}$

3. (Экон.К-76.2) Найти все решения системы уравнений
   $\begin{cases} \operatorname{tg}^2(x-y)-\dfrac{4}{\sqrt{3}}\operatorname{tg}(x-y)+1=0, \\ \sin x=\dfrac{1}{2}, \end{cases}$
   удовлетворяющие условиям $0\leq x\leq\dfrac{\pi}{2}$, $-\pi\leq y\leq 0$.

4. (Фил-77.2) Решить систему уравнений $\begin{cases} \operatorname{tg} x\operatorname{tg} y=5-2\sqrt{6}, \\ x+y=\dfrac{\pi}{4}. \end{cases}$

5. (ВМК-73.1) Решить систему уравнений $\begin{cases} 2\sin x \sin y + \cos x = 0, \\ 1 + \sin y \cos x = 2\cos^2 y \sin x. \end{cases}$

6. (Экон.К-72.2) Найти $\operatorname{tg} x$, если $\begin{cases} y\sin x + \cos x = 2, \\ -4\sin x + 2y\cos x = -y. \end{cases}$

7. (ВМК-75.2) Решить систему уравнений $\begin{cases} \sin(2x + \sin^2 y) = 0, \\ x - 3\sin^2 y = -2. \end{cases}$

8. (Филол-00.4) Решить систему $\begin{cases} x + y = \dfrac{\pi}{4}, \\ \operatorname{tg} x + \operatorname{tg} y = 1. \end{cases}$

9. (Геол-76.2) Найти все решения системы уравнений
$$\begin{cases} \dfrac{1}{\sqrt{\cos\left(\frac{\pi}{4} - x\right)}} \cdot (\sin^2 x + \operatorname{ctg} y - 1) = 0, \\ \cos^2 x + \dfrac{\operatorname{tg} y}{4} - 1 = 0. \end{cases}$$

10. (Геол-75.3) Найти все решения системы $\begin{cases} 5^{\sin x + \operatorname{tg} y} = 1, \\ 7^{\sin^2 x + \operatorname{tg}^2 y} = 7, \end{cases}$ удовлетворяющие условиям $0 < x < \pi, \quad 0 < y < \pi$.

11. (Псих-99.3) Решить систему $\begin{cases} \sin^2 x + \cos^2 y = \dfrac{3}{4}, \\ \cos x \cdot \sin y = \dfrac{\sqrt{6}}{4}, \\ \cos x \geq 0. \end{cases}$

12. (Геол-83.4) Решить систему уравнений $\begin{cases} 3\sin 3x + \cos y = -4, \\ x + y = \dfrac{3\pi}{2}. \end{cases}$

13. (Почв-94(1).4) Найти все решения системы $\begin{cases} \sin x \cdot \cos y = \dfrac{1}{4}, \\ \cos x \cdot \sin y = -\dfrac{1}{4}, \end{cases}$ удовлетворяющие неравенствам $-\dfrac{\pi}{2} \leq x \leq \dfrac{\pi}{2}, \quad -\dfrac{\pi}{2} \leq y \leq \dfrac{\pi}{2}$.

14. (Геогр-87.4) Найти все решения системы уравнений $\begin{cases} \sin(2x - y) = 0, \\ \cos(y - x) = 1, \end{cases}$ удовлетворяющие условиям $\pi \leq x \leq 2\pi, \quad -\pi \leq y \leq \pi$.

15. (ВМК-77.3) Решить систему уравнений
$$\begin{cases} \sin^2(-2x) - (3 - \sqrt{2})\operatorname{tg} 5y = \dfrac{3\sqrt{2} - 1}{2}, \\ \operatorname{tg}^2 5y + (3 - \sqrt{2})\sin(-2x) = \dfrac{3\sqrt{2} - 1}{2}. \end{cases}$$

16. (Хим-99(1).3) Найти все значения x из отрезка $[0;\pi]$, удовлетворяющие системе $\begin{cases} 2\sin 3x + 2\cos 4x = 1+\sqrt{2}, \\ 2\sin 7x - 2\sin x = \sqrt{2}. \end{cases}$

17. (Биол-80.5) Найти все те решения уравнения $3\sin^3 x - 3\cos^2 x + 7\sin x - \cos 2x + 1 = 0$, которые являются также решениями уравнения $\cos^2 x + 3\cos x \sin 2x - 8\sin x = 0$.

18. (Биол-79.5) Найти все пары чисел x и y, удовлетворяющие условиям
$$\begin{cases} \cos^2 xy - 3\sin xy \cos xy = 2\cos y \cos(2xy - y) - 2\cos^2(xy - y), \\ x^3 - xy + 1 = 0, \\ x^6 + 2xy \le 5. \end{cases}$$

6.4. Использование ограниченности тригонометрических функций, оценочные неравенства

Теоретический материал

При решении уравнений этого раздела следует помнить основные свойства тригонометрических функций и знать тригонометрические формулы, приведённые в предыдущих разделах.

Рассмотрим следующие приёмы решения тригонометрических уравнений:

- $\sin a(x) + \cos b(x) = 2$, где $a(x)$ и $b(x)$ – функции переменной x. Поскольку каждое из слагаемых левой части не превосходит 1, решение надо искать среди тех x, для которых $\sin a(x) = 1$ и $\cos b(x) = 1$, то есть
$$\sin a(x) + \cos b(x) = 2 \quad \Longleftrightarrow \quad \begin{cases} \sin a(x) = 1, \\ \cos b(x) = 1. \end{cases}$$
Аналогичная ситуация имеет место, если в левой части уравнения стоит сумма или разность синусов или косинусов.

- $\sin a(x) \cdot \cos b(x) = 1$, где $a(x)$ и $b(x)$ – функции переменной x. Поскольку каждый из множителей левой части по абсолютной величине не превосходит 1, решение надо искать среди тех x, для которых $\sin a(x) = \pm 1$ и $\cos b(x) = \pm 1$, то есть
$$\sin a(x) \cdot \cos b(x) = 1 \quad \Longleftrightarrow \quad \left[\begin{array}{l} \begin{cases} \sin a(x) = 1, \\ \cos b(x) = 1; \end{cases} \\ \begin{cases} \sin a(x) = -1, \\ \cos b(x) = -1. \end{cases} \end{array} \right.$$
Аналогичная ситуация имеет место, если произведение синусов или косинусов равно -1.

- $\sin^k x + \cos^m x = 1$, где k и m – заданные натуральные числа. При $k, m \ge 2$ из неравенств
$$\sin^k x \le \sin^2 x, \quad \cos^m x \le \cos^2 x$$

и основного тригонометрического тождества

$$\sin^2 x + \cos^2 x = 1$$

следует, что

$$1 = \sin^k x + \cos^m x \le \sin^2 x + \cos^2 x = 1.$$

Равенство возможно лишь при условии

$$\begin{cases} \sin^k x = \sin^2 x, \\ \cos^m x = \cos^2 x; \end{cases} \iff \begin{cases} \sin^2 x(\sin^{k-2} x - 1) = 0, \\ \cos^2 x(\cos^{m-2} x - 1) = 0. \end{cases}$$

Полученная система легко решается.

Подобным образом можно найти решение уравнений такого типа и при $k, m \le 2$, и при $k, m \notin \mathbb{N}$.

- $a(x)\sin x + b(x)\cos x = c(x)$, где функции $a(x)$, $b(x)$, $c(x)$ таковы, что $c^2(x) \ge a^2(x) + b^2(x)$. Вводим вспомогательный угол $\varphi(x)$ так, чтобы

$$\sin\varphi(x) = \frac{b(x)}{\sqrt{a^2(x) + b^2(x)}}, \quad \cos\varphi(x) = \frac{a(x)}{\sqrt{a^2(x) + b^2(x)}}.$$

Исходное уравнение запишется в виде

$$\sqrt{a^2(x) + b^2(x)}\,\sin(x + \varphi(x)) = c(x) \iff$$

$$\iff \sin(x + \varphi(x)) = \frac{c(x)}{\sqrt{a^2(x) + b^2(x)}}.$$

Так как в рассматриваемом классе задач $c^2(x) \ge a^2(x) + b^2(x)$, то правая часть уравнения по модулю не меньше единицы. Поскольку левая часть уравнения по модулю не больше единицы, решения уравнения содержатся среди решений системы

$$\begin{cases} |\sin(x + \varphi(x))| = 1, \\ \sqrt{a^2(x) + b^2(x)} = |c(x)|, \end{cases}$$

которая в конкретных задачах, как правило, легко решается.

Примеры решения задач

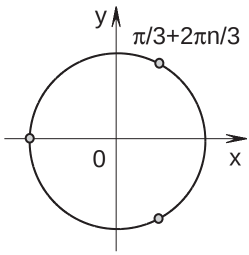
Пример 1. (У) Решить уравнение $\cos 3x + \sin\left(2x - \dfrac{7\pi}{6}\right) = -2.$

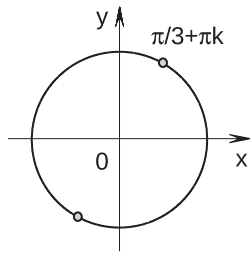
Решение. Так как $-1 \le \cos 3x \le 1$ и $-1 \le \sin\left(2x - \dfrac{7\pi}{6}\right) \le 1$, то исходное равенство может выполняться только при условии

$$\begin{cases} \cos 3x = -1, \\ \sin\left(2x - \dfrac{7\pi}{6}\right) = -1; \end{cases} \iff \begin{cases} 3x = \pi + 2\pi n, \ n \in \mathbb{Z}, \\ 2x - \dfrac{7\pi}{6} = -\dfrac{\pi}{2} + 2\pi k, \ k \in \mathbb{Z}; \end{cases} \iff$$

$$\iff \quad \left\{ \begin{array}{l} x = \dfrac{\pi}{3} + \dfrac{2\pi n}{3},\ n \in \mathbb{Z}, \\ x = \dfrac{\pi}{3} + \pi k,\ k \in \mathbb{Z}. \end{array} \right.$$

Из первой серии на тригонометрической окружности получаем три точки, из второй – две.





Только одна точка окружности принадлежит сразу двум сериям, это
$x = \dfrac{\pi}{3} + 2\pi m,\ m \in \mathbb{Z}.$

О т в е т. $\dfrac{\pi}{3} + 2\pi m,\ m \in \mathbb{Z}.$

П р и м е р 2. (У) Решить уравнение $\sin^{11} x + \cos^5 x = -1.$

Р е ш е н и е. Перепишем исходное уравнение в виде

$$-\sin^{11} x - \cos^5 x = 1.$$

Так как $-\sin^{11} x \le \sin^2 x$ и $-\cos^5 x \le \cos^2 x$, то

$$1 = -\sin^{11} x - \cos^5 x \le \sin^2 x + \cos^2 x = 1,$$

это возможно только при условии

$$\left\{ \begin{array}{l} -\sin^{11} x = \sin^2 x, \\ -\cos^5 x = \cos^2 x; \end{array} \right. \iff \left[\begin{array}{l} \left\{ \begin{array}{l} \sin x = 0, \\ \cos x = -1; \end{array} \right. \\ \left\{ \begin{array}{l} \sin x = -1, \\ \cos x = 0; \end{array} \right. \end{array} \right. \iff \left[\begin{array}{l} x = \pi + 2\pi n,\ n \in \mathbb{Z}; \\ x = -\dfrac{\pi}{2} + 2\pi k,\ k \in \mathbb{Z}. \end{array} \right.$$

О т в е т. $\pi + 2\pi n,\ -\dfrac{\pi}{2} + 2\pi k;\ n, k \in \mathbb{Z}.$

П р и м е р 3. (Геогр-98.4) Решить уравнение $\sin x + \sqrt{3} \cos x = 2 + 3\cos^2 \left(2x + \dfrac{\pi}{6}\right).$

Р е ш е н и е. Поделив обе части на два, преобразуем левую часть с использованием дополнительного угла:

$$\frac{1}{2}\sin x + \frac{\sqrt{3}}{2}\cos x = 1 + \frac{3}{2}\cos^2\left(2x + \frac{\pi}{6}\right) \iff \cos\left(x - \frac{\pi}{6}\right) = 1 + \frac{3}{2}\cos^2\left(2x + \frac{\pi}{6}\right).$$

Область значений косинуса составляет отрезок $[-1;1]$, поэтому левая часть полученного уравнения не превосходит единицы, тогда как правая часть не меньше неё. Значит, равенство возможно только в случае

$$\begin{cases} \cos\left(x-\dfrac{\pi}{6}\right)=1, \\ \cos\left(2x+\dfrac{\pi}{6}\right)=0; \end{cases} \iff \begin{cases} x=\dfrac{\pi}{6}+2\pi n,\ n\in\mathbb{Z}, \\ x=\dfrac{\pi}{6}+\dfrac{\pi m}{2},\ m\in\mathbb{Z}; \end{cases}$$

решением этой системы является серия $x=\dfrac{\pi}{6}+2\pi n,\ n\in\mathbb{Z}$.

Ответ. $\dfrac{\pi}{6}+2\pi n,\ n\in\mathbb{Z}$.

Задачи

1. (ЕГЭ) Решить уравнение $\sin\left(\dfrac{37\pi}{2}+x\right)=3x^2+1$.
2. (У) Решить уравнение $\sin x+\sin 9x=2$.
3. (У) Решить уравнение $\cos x-\sin 3x=-2$.
4. (ЕГЭ) Решить уравнение $2\cos^2 2x-\sin 3x=3$.
5. (ЕГЭ) Решить уравнение $\sin^4 x+\cos^3 x=1$.
6. (У) Решить уравнение $\sin^3 x-\cos^7 x=1$.
7. (У) Решить уравнение $\sin x+\sqrt{\cos x}=1$.
8. (У) Решить уравнение $\sin x\cdot\sin 7x=1$.
9. (У) Решить уравнение $\cos x\cdot\cos 6x=-1$.
10. (У) Решить уравнение $\sin^5 x\cdot\cos^6 x=\dfrac{1}{31}$.
11. (У) Решить уравнение $\sin^6 x\cdot\cos^{10} x=\dfrac{7}{8}$.
12. (У) Решить уравнение $\cos x=x^2+1$.
13. (У) Решить уравнение $\cos^2(\pi x)-\sqrt{x^2-5x+4}=1$.
14. (У) Решить уравнение $\cos^2 x=0,5\left(\sqrt{1+4x^2}+\sqrt{1+x^2}\right)$.
15. (У) Решить уравнение $\sin 9x\cdot\sin x+\cos x=\dfrac{3}{2}$.
16. (У) Решить уравнение $\sin^5 x+\cos^5 x=2-\sin^2 x$.
17. (У) Решить уравнение $\cos^2 x+\cos^2\sqrt{3}x=2$.
18. (Геогр-98.4) Решить уравнение $\sin x-\sqrt{3}\cos x=2+5\sin^2\left(2x+\dfrac{\pi}{3}\right)$.
19. (Экон-90.5) Найти все корни уравнения $\sqrt{1-\operatorname{ctg}^2 2\pi x}\cdot\cos\pi x+\sin\pi x=\sqrt{2}$, расположенные на отрезке $[-3;1]$.

7. Изображение множества точек на координатной плоскости, использование графических иллюстраций в уравнениях и неравенствах различных типов

7.1. Геометрические места точек, графики функций, правила линейных преобразований графиков

Теоретический материал

Геометрическим местом точек с данным свойством называется множество всех точек плоскости (пространства), обладающих этим свойством.

Например, геометрическим местом точек плоскости, удалённых на расстояние R от данной точки O этой плоскости, является окружность радиуса R с центром в точке O; геометрическим местом точек плоскости, равноудалённых от точек A и B, является серединный перпендикуляр к отрезку AB, лежащий в этой плоскости.

Функцией называется отображение числового множества X на числовое множество Y, при котором каждому значению x из множества X, называемого *областью определения*, ставится в соответствие единственное значение y из множества Y, называемого *множеством значений*. Для обозначения функции используется $y = f(x)$.

График функции $y = f(x)$ – это множество точек плоскости с координатами $(x,\, y)$, у которых $x \in X$ – допустимые значения аргумента, а $y = f(x) \in Y$ – соответствующие им значения функции.

Графическое изображение функции даёт наглядное представление о её основных особенностях.

Функция $y = f(x)$ называется *чётной*, если для всех $x \in X$ выполняется соотношение $(-x) \in X$ и равенство $f(x) = f(-x)$.

Функция $y = f(x)$ называется *нечётной*, если для всех $x \in X$ имеет место соотношение $(-x) \in X$ и равенство $f(x) = -f(-x)$.

З а м е ч а н и е. График чётной функции симметричен относительно оси y, а график нечётной функции центральносимметричен относительно начала координат.

Функция $y = f(x)$ называется *периодической*, если существует такое число $T > 0$, что для всех $x \in X$ выполняются соотношения $(x+T) \in X$, $(x-T) \in X$ и равенства $f(x-T) = f(x) = f(x+T)$. При этом число T называется *периодом* функции.

Функция $y = f(x)$ называется *возрастающей* на множестве $D \subset X$, если для любых $x_1,\, x_2 \in D$, $x_1 < x_2$ выполняется неравенство $f(x_1) < f(x_2)$.

Функция $y = f(x)$ называется *убывающей* на множестве $D \subset X$, если для любых $x_1,\, x_2 \in D$, $x_1 < x_2$ выполняется неравенство $f(x_1) > f(x_2)$.

Функция $y = f(x)$ называется *монотонной* на множестве $D \subset X$, если она является возрастающей или убывающей на этом множестве.

Все задачи этого раздела решаются с помощью преобразования графиков элементарных функций:

$$y = x^n, \quad n \in \mathbb{Z};$$
$$y = a^x, \quad y = \log_a x, \quad a > 0, \quad a \neq 1;$$
$$y = \sin x, \quad y = \cos x, \quad y = \operatorname{tg} x, \quad y = \operatorname{ctg} x.$$

З а м е ч а н и е. Графики линейной ($y = kx + b$) и квадратичной ($y = ax^2 + bx + c$, $a \neq 0$) функций могут быть также получены с помощью приведённых ниже преобразований из графиков функций $y = x$ и $y = x^2$. Однако на практике их обычно строят непосредственно: вычисляют точки пересечения с осями координат, для параболы находят координаты вершины и так далее.

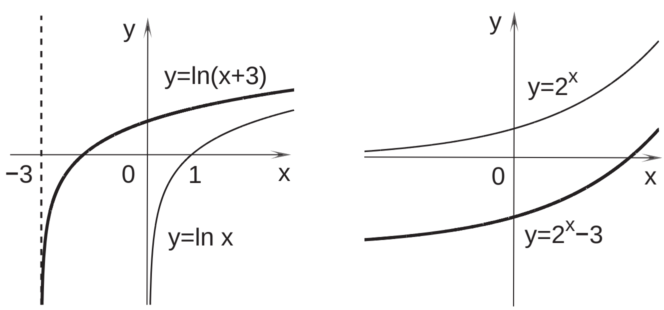
Приведём основные приёмы преобразования графиков функции:

- График функции $y = f(x \pm a)$, $a > 0$ получается из графика функции $y = f(x)$ сдвигом вдоль оси x на a единиц влево для $f(x+a)$ и на a единиц вправо для $f(x-a)$.

  Пример: график функции $y = \ln(x+3)$ получается сдвигом влево на 3 единицы графика $y = \ln x$.

- График функции $y = f(x) \pm a$, $a > 0$ получается из графика функции $y = f(x)$ сдвигом его вдоль оси y на a единиц вверх для $f(x) + a$ и на a единиц вниз для $f(x) - a$.

  Например, график функции $y = 2^x - 3$ получается сдвигом вниз на 3 единицы графика $y = 2^x$.



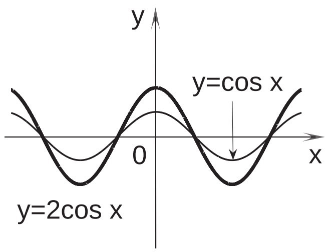
- График функции $y = kf(x)$ при $k > 0$ получается из графика функции $y = f(x)$ деформацией исходного графика $y = f(x)$ вдоль оси y: растяжением в k раз при $k > 1$ или сжатием в $1/k$ раз при $k < 1$. При $k = -1$ происходит симметричное отражение графика $y = f(x)$ относительно оси x, а при $k < 0$ и $k \neq -1$ происходит отражение сначала относительно оси x с последующим необходимым деформированием этого графика.

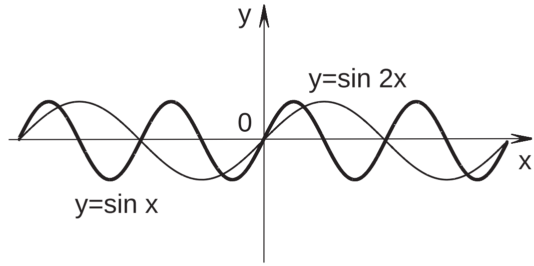
  Например, график функции $y = 2\cos x$ получается растяжением в два раза вдоль оси y графика $y = \cos x$.

- График функции $y = f(kx)$ при $k > 0$ получается из графика функции $y = f(x)$ деформацией исходного графика $y = f(x)$ вдоль оси x: сжатием в k раз при $k > 1$ или растяжением в $1/k$ раз при $k < 1$. При $k < 0$ предварительно необходимо симметрично отобразить график $y = f(x)$ относительно оси y, а затем осуществить необходимую деформацию этого графика.

  Например, график функции $y = \sin 2x$ получается сжатием в два раза вдоль оси x графика $y = \sin x$.

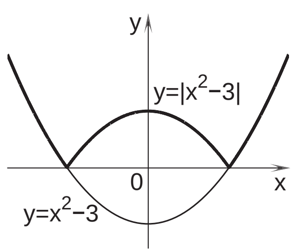
  З а м е ч а н и е. Если $y = f(x)$ – периодическая функция с периодом T, то функция $y = f(kx)$ – периодическая функция с периодом $T_1 = \dfrac{T}{k}$.

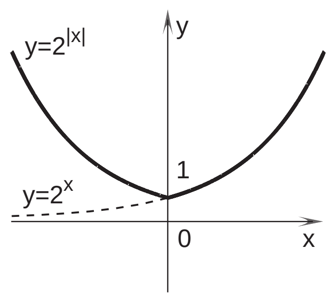




- График функции $y = f(kx+b) = f\left(k\left[x+\dfrac{b}{k}\right]\right)$ строится как комбинация первых двух пунктов. А именно, $f(x)$ сначала деформируется в k раз, а затем переносится на $\dfrac{b}{k}$ единиц в нужную сторону.

- График функции $y = |f(x)|$ получается из графика функции $y = f(x)$ следующим образом: часть графика, лежащая над осью x, остаётся без изменения, а часть графика, находящаяся под осью x, отражается симметрично относительно оси x. Таким образом, ниже оси x графика нет.





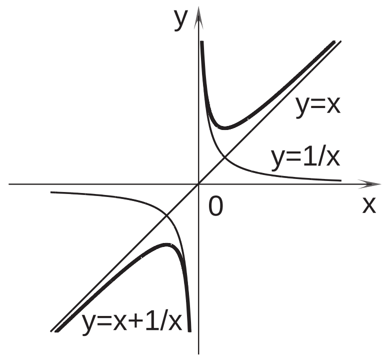
Например, график функции $y = |x^2-3|$ получается из графика $y = x^2-3$ отражением нижней части графика.

- График функции $y = f(|x|)$ получается из графика функции $y = f(x)$ следующим образом: вместо левой (относительно оси y) части графика изображается отражённая (относительно оси y) правая. При этом правая часть графика остаётся без изменения.

  Например, график функции $y = 2^{|x|}$ получается из графика $y = 2^x$ отражением правой части графика.

- Метод сложения графиков. Он заключается в следующем. Чтобы построить график $y = f_1(x) + f_2(x)$, сначала нужно построить вспомогательные графики функций $y = f_1(x)$, $y = f_2(x)$, а затем складывать соответствующие значения y для этих функций в каждой точке x. При этом следует помнить, что число точек, в которых необходимо провести сложение графиков, выбирается таким образом, чтобы получить достаточно полное представление о графике функции $y = f_1(x) + f_2(x)$, используя необходимые закономерности поведения функций $y = f_1(x)$ и $y = f_2(x)$.

Например, график функции $y = x + \dfrac{1}{x}$ получается сложением графиков функций $y = x$ и $y = \dfrac{1}{x}$.



Сумма возрастающих (убывающих) функций есть также возрастающая (убывающая) функция. Сумма возрастающей и убывающей функций может вообще не являться монотонной функцией.

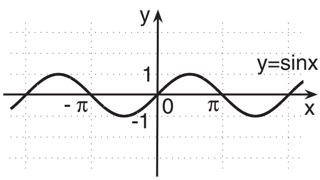
Все перечисленные выше факты позволяют не только эффективно строить графики функций, но и на их основе делать выводы о свойствах этих функций.

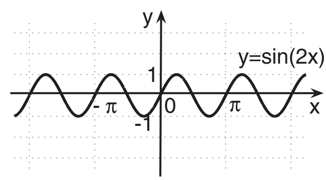
Примеры решения задач

П р и м е р 1. (У) Построить график функции $y = -3\sin 2|x|$.

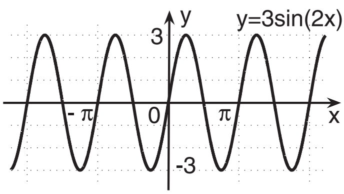
Р е ш е н и е. Построим график функции $y = \sin x$ и последовательными преобразованиями приведём его к графику функции $y = -3\sin 2|x|$.

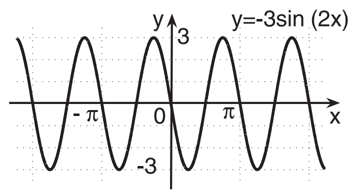
Сначала сжатием в два раза вдоль оси x получим график $y = \sin 2x$.



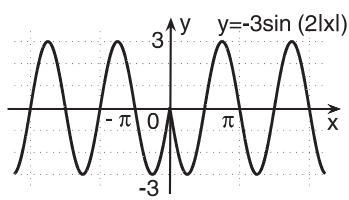


Потом растяжением в 3 раза вдоль оси y получим график $y = 3\sin 2x$, отразив который относительно оси x, получим график $y = -3\sin 2x$.



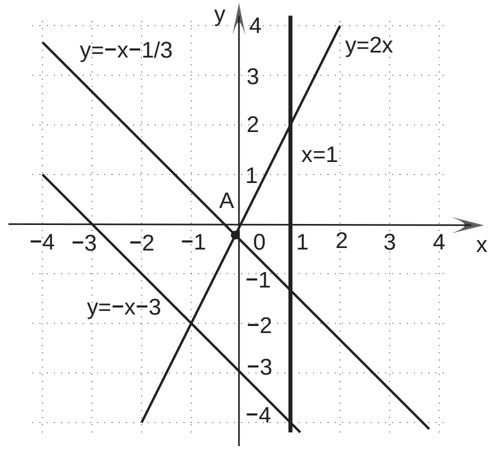


И, наконец, с помощью отражения правой части графика относительно оси y получаем график $y = -3\sin 2|x|$.



П р и м е р 2. (Экон.К-72.3) Найти и изобразить на координатной плоскости точки, координаты которых удовлетворяют системе уравнений
$$\begin{cases}(1-x)(x+y+3)(2x-y)=0,\\(x-1)(3x+3y+1)=0.\end{cases}$$

Р е ш е н и е. Заметим, что $x=1$ является решением системы, и проведём на координатной плоскости соответствующую прямую. Оставшиеся решения исходной системы удовлетворяют системе
$$\begin{cases}\left[\begin{array}{l}y=-x-3;\\y=2x;\end{array}\right.\\y=-x-\dfrac{1}{3}.\end{cases}$$

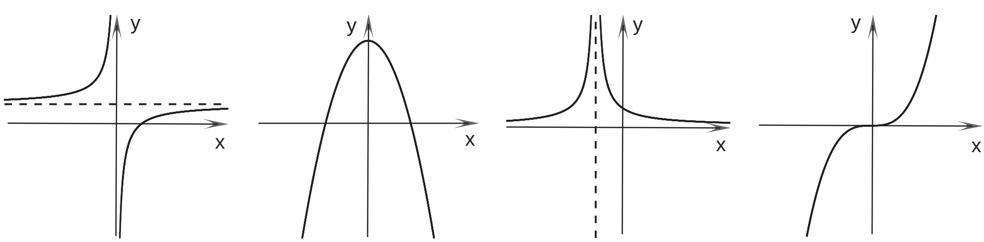


Каждое уравнение в системе задаёт прямую на координатной плоскости. Поскольку первая и третья прямые параллельны, решением системы будет точка пересечения прямых $y=2x$ и $y=-x-\dfrac{1}{3}$. Координаты точки пересечения можно найти, решив систему из этих двух уравнений.

О т в е т. Прямая $x=1$; точка $A\left(-\dfrac{1}{9};-\dfrac{2}{9}\right)$.

Задачи

1. (ЕГЭ.А) На одном из четырёх рисунков изображён график нечётной функции. Указать этот рисунок.



2. (У) Построить график функции $y=|x^2+5x-6|$.
3. (У) Построить график функции $y=x^2+5|x|-6$.
4. (У) Построить график функции $y=3\cos 2x$.
5. (У) Построить график функции $y=1-\dfrac{1}{|x|}$.
6. (У) Построить график функции $y=\dfrac{x}{x+1}$.

7. (У) Построить график функции $y = \dfrac{|\sin x|}{\sin x}$.

8. (Экон-72.2) Найти и изобразить на координатной плоскости точки, координаты которых удовлетворяют системе уравнений
$\begin{cases} 18x^2y^2 - 4x^3y^2 - 3x^2y^3 = 0, \\ 12y^2 - 2xy^2 + 3y^3 = 0. \end{cases}$

9. (ВМК-99.2) На координатной плоскости (x, y) проведена окружность радиуса 4 с центром в начале координат. Прямая, заданная уравнением $y = 4 - (2 - \sqrt{3})x$, пересекает её в точках A и B. Найти сумму длин отрезка AB и меньшей дуги AB.

10. (Геол-82.5) Построить на координатной плоскости множество точек, координаты каждой из которых удовлетворяют условию $y = 4 - \left|y - \dfrac{6}{x}\right| - 2\left|\dfrac{3}{x} - 1\right|$, и среди точек этого множества найти те, у которых координата y принимает наибольшее значение.

7.2. Плоские геометрические фигуры, применение метода координат

Теоретический материал

При решении задач этого раздела следует алгебраическими преобразованиями привести исходную задачу к системе равенств и неравенств вида[1]

$$\begin{cases} a \le x \le b, \\ y = f(x), \\ y \ge g(x), \\ y \le h(x). \end{cases}$$

После этого на координатной плоскости необходимо изобразить графики всех функций $y = f(x)$, $y = g(x)$ и $y = h(x)$. Они разобьют координатную плоскость (x, y) на подобласти, на каждой из которых надо построить соответствующие множества точек или графики, удовлетворяющие системе.

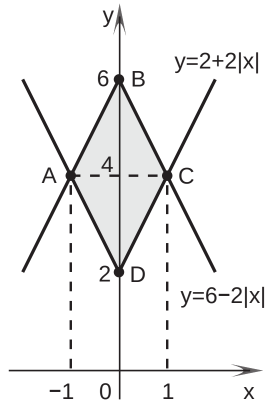
Примеры решения задач

Пример 1. (Геол-81.3) Найти площадь фигуры, которая задаётся на координатной плоскости системой неравенств $\begin{cases} y \le 6 - 2|x|, \\ y \ge 2 + 2|x|. \end{cases}$

Решение. Построим на координатной плоскости графики функций $y = 6 - 2|x|$ и $y = 2 + 2|x|$.

[1] В конкретных задачах может встречаться несколько равенств и неравенств одного вида, или некоторые из них могут отсутствовать. Знаки нестрогих неравенств могут быть заменены на строгие.

Нас интересуют точки, которые лежат ниже графика функции $y = 6 - 2|x|$ и выше графика функции $y = 2 + 2|x|$, то есть точки, лежащие внутри ромба $ABCD$, где $B(0;6)$ и $D(0;2)$ – точки пересечения графиков с осью Oy.



Для того чтобы вычислить координаты точек пересечения графиков друг с другом (A и C), достаточно решить систему уравнений

$$\begin{cases} y = 6 - 2|x|, \\ y = 2 + 2|x|; \end{cases}$$

откуда $A(-1;4)$ и $C(1;4)$.

Площадь ромба равна половине произведения диагоналей, то есть

$$S = \frac{1}{2} AC \cdot BD = \frac{1}{2} \cdot 2 \cdot 4 = 4.$$

Ответ. 4.

Пример 2. (Экон-88.4) Найти площадь фигуры, заданной на координатной плоскости соотношением $\left|y - \frac{1}{2}x^2\right| + \left|y + \frac{1}{2}x^2\right| \le x + 2$.

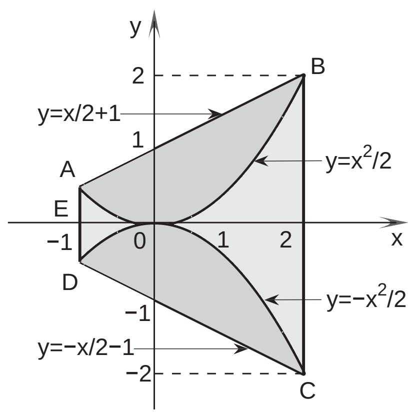
Решение. Раскрываем модули по определению.

1) При $y < -\dfrac{x^2}{2}$ получим $-y + \frac{1}{2}x^2 - y - \frac{1}{2}x^2 \le 2 + x \iff y \ge -\dfrac{x}{2} - 1$.

2) При $-\dfrac{x^2}{2} \le y < \dfrac{x^2}{2}$ получим $-y + \frac{1}{2}x^2 + y + \frac{1}{2}x^2 \le 2 + x \iff x \in [-1;2]$.

3) При $y \ge \dfrac{x^2}{2}$ получим $y - \frac{1}{2}x^2 + y + \frac{1}{2}x^2 \le 2 + x \iff y \le \dfrac{x}{2} + 1$.

Построив на плоскости точки, координаты которых удовлетворяют этим неравенствам, получим трапецию $ABCD$, где координаты вершин $A\left(-1;\dfrac{1}{2}\right)$, $B(2;2)$, $C(2;-2)$, $D\left(-1;-\dfrac{1}{2}\right)$ вычисляются как общие точки соответствующих функций. Площадь трапеции равна



$$S_{ABCD} = \frac{1}{2}(BC + AD)AH = \frac{1}{2}(1+4) \cdot 3 = \frac{15}{2},$$

где $H\left(2;\dfrac{1}{2}\right)$, AH – высота трапеции.

Ответ. $\dfrac{15}{2}$.

Задачи

1. (ИСАА-96.2) Найти площадь фигуры, заданной на координатной плоскости системой $\begin{cases} y \geq -|x|-1, \\ y \leq -2|x|+3. \end{cases}$

2. (Геол-99.3) Найти площадь фигуры, заданной на координатной плоскости (x, y) системой неравенств $\begin{cases} x(x+y-\sqrt{2}) \leq 0, \\ x^2+y^2 \leq 2. \end{cases}$

3. (Геол.ОГ-81.4) Найти площадь фигуры, которая задаётся на координатной плоскости условием $|x|+|y-1| \leq 4$.

4. (Экон-88.4) Найти площадь фигуры, заданной на координатной плоскости соотношением $2 \cdot (2-x) \geq |y-x^2|+|y+x^2|$.

5. (Геол.ОГ-80.5) Найти площадь фигуры, которая задаётся на координатной плоскости следующими условиями $\begin{cases} ||x-y|-|y-1|| = x-2y+1, \\ (x-1)^2+(y-1)^2 \leq 1. \end{cases}$

6. (Экон-91.5) Найти площадь плоской фигуры, состоящей из точек, координаты которых удовлетворяют условию $(x^2+y^2-x-y) \cdot (x^2+y^2-1) \leq 0$.

7. (ИСАА-97.5) Найти площадь фигуры, заданной условиями $\begin{cases} y \leq \sqrt{4-x^2}, \\ y \geq |x-1|-3. \end{cases}$

8. (Геол-95(1).8) Изобразить на координатной плоскости фигуру, заданную неравенством $x^2+y^2+6(x-|y|) \leq 0$. Найти площадь этой фигуры.

9. (Почв-96(1).6) Определить площадь фигуры, расположенной на координатной плоскости и состоящей из точек (x, y), удовлетворяющих неравенству $\log_{(x^2+y^2)}(x+y) > 1$.

7.3. Использование графических иллюстраций при решении уравнений и неравенств

Теоретический материал

В этом разделе приведены задачи, при решении которых вам помогут графические иллюстрации. Однако, помните: *все заключения, которые вы делаете, используя график, необходимо строго обосновать.*

Примеры решения задач

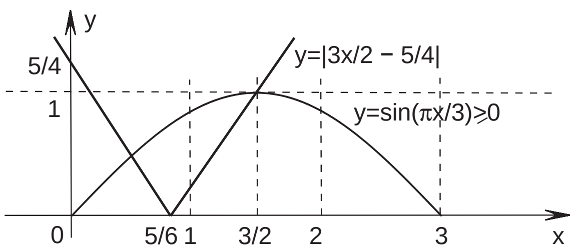
П р и м е р 1. (Экон.К-70.2) Решить уравнение

$$|5-6x| - 4\sin\frac{\pi x}{3} - 4\sin\frac{2\pi x}{3} + \frac{8\operatorname{tg}\dfrac{\pi x}{3}}{1+\operatorname{tg}^2\dfrac{\pi x}{3}} = 0.$$

Р е ш е н и е. Используя формулу $\sin\alpha = \dfrac{2\operatorname{tg}\dfrac{\alpha}{2}}{1+\operatorname{tg}^2\dfrac{\alpha}{2}}$, преобразуем последнее слагаемое к виду

$$\frac{8\operatorname{tg}\dfrac{\pi x}{3}}{1+\operatorname{tg}^2\dfrac{\pi x}{3}} = 4\sin\frac{2\pi x}{3}, \quad \text{где} \quad \cos\frac{\pi x}{3} \neq 0, \quad \text{то есть} \quad x \neq \frac{3}{2}+3n,\ n\in\mathbb{Z}.$$

Уравнение переписывается в виде $|6x-5| = 4\sin\dfrac{\pi x}{3}$, то есть $\sin\dfrac{\pi x}{3} = \left|\dfrac{3}{2}x - \dfrac{5}{4}\right|$. Построим графики левой и правой частей уравнения.



1) При $x<0$ решений нет, так как в этом случае $\left|\dfrac{3}{2}x - \dfrac{5}{4}\right| > 1 \geq \sin\dfrac{\pi x}{3}$.

2) Рассмотрим $x \in \left[0; \dfrac{5}{6}\right]$. Значение $x = \dfrac{1}{2}$ является решением. Других решений нет, так как на этом отрезке функция $y = \sin\dfrac{\pi x}{3}$ возрастает, а функция $y = \left|\dfrac{3}{2}x - \dfrac{5}{4}\right|$ убывает.

3) При $\dfrac{5}{6} < x \leq \dfrac{3}{2}$ исследуемое уравнение примет вид $\sin\dfrac{\pi x}{3} = \dfrac{3}{2}x - \dfrac{5}{4}$. Значение $x = 3/2$ является решением этого уравнение, но не входит в область определения исходного уравнения, так как включено в серию $x = \dfrac{3}{2} + 3n$ при $n = 0$. Для того чтобы доказать отсутствие других решений на этом промежутке, достаточно доказать возрастание функции $f(x) = \dfrac{3}{2}x - \dfrac{5}{4} - \sin\dfrac{\pi x}{3}$.

Рассмотрим $\dfrac{5}{6} \leq x_1 < x_2 \leq \dfrac{3}{2}$ и покажем, что $f(x_2) - f(x_1) > 0$. Преобразуем разность $f(x_2) - f(x_1)$ следующим образом:

$$f(x_2) - f(x_1) = \frac{3}{2}(x_2 - x_1) - \left(\sin\frac{\pi x_2}{3} - \sin\frac{\pi x_1}{3}\right) =$$

$$= \frac{3}{2}(x_2 - x_1) - 2\sin\frac{\pi(x_2 - x_1)}{6}\cos\frac{\pi(x_2 + x_1)}{6}.$$

Так как аргументы синуса и косинуса при $\dfrac{5}{6} \le x_1 < x_2 \le \dfrac{3}{2}$ принадлежат первой четверти, справедливы оценки:

$$0 \le \cos\frac{\pi(x_2+x_1)}{6} \le 1 \quad \text{и} \quad 0 \le \sin\frac{\pi(x_2-x_1)}{6} \le \frac{\pi(x_2-x_1)}{6}.$$

Следовательно,

$$f(x_2) - f(x_1) \ge \frac{3}{2}(x_2-x_1) - 2\sin\frac{\pi(x_2-x_1)}{6} \ge$$

$$\ge \frac{3}{2}(x_2-x_1) - 2\frac{\pi(x_2-x_1)}{6} = (x_2-x_1)\left(\frac{3}{2} - \frac{\pi}{3}\right) > 0.$$

Возрастание функции $f(x)$, а значит, и отсутствие решений при $\dfrac{5}{6} < x \le \dfrac{3}{2}$, доказаны.

4) При $x > \dfrac{3}{2}$ решений нет, так как в этом случае $\left|\dfrac{3}{2}x - \dfrac{5}{4}\right| > 1 \ge \sin\dfrac{\pi x}{3}$.

О т в е т. $\dfrac{1}{2}$.

Задачи

1. (ВМК-86.2) Найти координаты точки, лежащей на прямой $3x - 5y = 17$ и наименее удалённой от начала координат.

2. (Почв-74.4) Найти все значения a, при которых неравенство $\dfrac{x-2a-1}{x-a} < 0$ выполняется для всех таких x, что $1 \le x \le 2$.

3. (Псих-85.4) Найти наибольшее и наименьшее значения функции $y = |x^2+x| + |x^2-3x+2|$ на отрезке $\left[-\dfrac{1}{2}; \dfrac{3}{2}\right]$.

4. (Почв-95(2).5) Найти все значения b, при которых система $\begin{cases} 4y = 4b + 3 - x^2 + 2x, \\ x^2 + y^2 = 2x \end{cases}$ имеет два решения.

5. (Хим-93(2).5) Найти число решений уравнения $2^{x+1} + 2^{1-x} = 1 - 4x - x^2$.

6. (Геогр-00(1).5) Эпицентр циклона, движущийся прямолинейно, во время первого измерения находился в 24 км к северу и 5 км к западу от метеостанции, а во время второго измерения находился в 20 км к северу и $3\frac{1}{3}$ км к западу от метеостанции. Определите наименьшее расстояние, на которое эпицентр циклона приблизится к метеостанции.

7. (ВМК-82.5) Для каждого значения параметра a найти все значения x, удовлетворяющие уравнению $|x+3| - a|x-1| = 4$.

8. (Экон.М-96.6) При каких значениях p площадь фигуры, заданной на координатной плоскости условием $|2x+y| + |x-y+3| \le p$, будет равна 24?

8. Элементы математического анализа

8.1. Производная, её геометрический и физический смысл. Производные элементарных функций, основные правила дифференцирования функций

В этом разделе собраны задачи, при решении которых вам понадобится умение вычислять производные простейших функций и знание геометрического и физического смысла производной.

Заметим, что производная не входит в программу вступительных экзаменов некоторых вузов (в частности, МГУ) и, следовательно, все задачи, предлагаемые на вступительных экзаменах в эти вузы, могут быть решены без использования производной.

Все задачи этого раздела взяты из материалов ЕГЭ и снабжены указанием соответствующего уровня сложности:

A – задачи базового уровня сложности;
B – задачи повышенного уровня сложности;
C – задачи высокого уровня сложности.

Для успешного решения задач этого раздела достаточно запомнить производные элементарных функций, уметь применять основные правила дифференцирования и иметь представление о геометрическом и физическом смысле производной. Все эти сведения приводятся ниже. Строгое определение предела, непрерывной функции и доказательство основных формул входит в программу первого курса вуза, и ознакомиться с этим можно в соответствующей специализированной литературе.

Теоретический материал

Геометрический смысл производной

Рассмотрим график непрерывной функции $y = f(x)$ и зафиксируем на нём точку A_0 с координатами $(x_0; f(x_0))$. Пусть точка $A(x; f(x))$ также принадлежит графику, но не совпадает с точкой A_0. Проведём секущую через точки A_0 и A.

Если при приближении точки A к точке A_0 секущая, проведённая через эти две точки, стремится к некоторому предельному положению, то это предельное положение секущей называют *касательной* в точке A_0 (левый рисунок).

Установим связь между касательной, проведённой в точке A_0, и производной функции $y = f(x)$ в точке x_0.

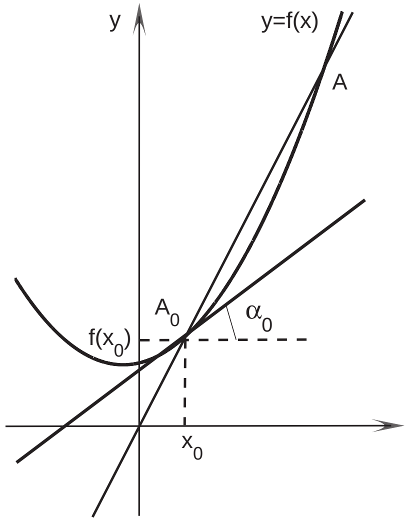
В дальнейшем величину $\Delta x = x - x_0$ будем называть *приращением аргумента*, а величину $\Delta y = f(x) - f(x_0)$ *приращением функции* $y = f(x)$.

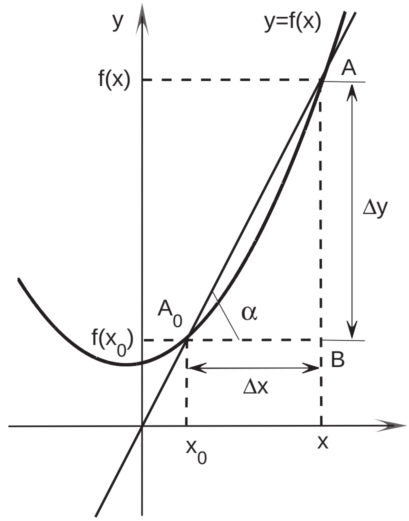
Пусть α есть угол наклона секущей A_0A, а α_0 – угол наклона касательной.

Рассмотрим прямоугольный треугольник ΔA_0AB (правый рисунок), где точка B имеет координаты $(x; f(x_0))$. Получим

$$\operatorname{tg}\alpha = \frac{AB}{A_0B} = \frac{f(x) - f(x_0)}{x - x_0} = \frac{\Delta y}{\Delta x}.$$

Если приращение аргумента Δx устремить к нулю, то точка A будет стремиться к точке A_0, и секущая будет стремиться к касательной. Следовательно, $\dfrac{\Delta y}{\Delta x}$ будет стремиться к $\operatorname{tg}\alpha_0$.





По определению, *производная* в точке x_0 есть предел, к которому стремится отношение приращения функции Δy к приращению аргумента Δx при Δx, стремящемся к нулю, запись такова:

$$f'(x_0) = \lim_{\Delta x \to 0} \frac{\Delta y}{\Delta x}.$$

И так как $\dfrac{\Delta y}{\Delta x}$ стремится к $\operatorname{tg} \alpha_0$, то значение производной равно угловому коэффициенту касательной. В этом заключается *геометрический смысл производной.*

Физический смысл производной

Пусть точка движется вдоль координатной прямой и её координата в момент времени t определяется функцией $f(t)$. Рассмотрим промежуток времени $[t_0; t]$. В момент времени t_0 точка имеет координату $f(t_0)$, а в момент времени t – координату $f(t)$. Значит, её перемещение за промежуток времени $\Delta t = t - t_0$ равно $\Delta f = f(t) - f(t_0)$. Разделив перемещение на промежуток времени, получим *среднюю скорость* движения за промежуток времени $[t_0; t]$

$$v_{\text{ср.}} = \frac{f(t) - f(t_0)}{t - t_0} = \frac{\Delta f}{\Delta t}.$$

Предел средней скорости при Δt, стремящемся к нулю, называют *мгновенной скоростью* движения в момент времени t_0. Следовательно,

$$v_{\text{мгн.}} = \lim_{\Delta t \to 0} \frac{\Delta y}{\Delta t} = f'(t_0).$$

В общем случае, если какая-либо величина y изменяется по закону $y = f(t)$, то мгновенная скорость изменения этой величины при $t = t_0$ равна $f'(t_0)$. Таким образом, производная есть мгновенная скорость изменения функции. В этом заключается *физический смысл производной.*

Производные элементарных функций

Для того, чтобы успешно решать задачи с использованием производных, необходимо запомнить, чему равны производные следующих элементарных функций:

$$C' = 0 \quad \text{для любой константы } C \in \mathbb{R}, \tag{30}$$

$$x' = 1, \qquad (x^a)' = ax^{a-1}, \tag{31}$$

$$(\sin x)' = \cos x, \qquad (\cos x)' = -\sin x, \tag{32}$$

$$(\operatorname{tg} x)' = \frac{1}{\cos^2 x}, \qquad (\operatorname{ctg} x)' = -\frac{1}{\sin^2 x}, \tag{33}$$

$$(e^x)' = e^x, \qquad (\ln x)' = \frac{1}{x}, \tag{34}$$

$$(a^x)' = a^x \ln a, \qquad (\log_a x)' = \frac{1}{x \ln a}. \tag{35}$$

Основные правила дифференцирования функций:

1) постоянный множитель можно выносить за знак производной; производная суммы двух функций равна сумме их производных:

$$(Cf(x))' = Cf'(x), \qquad (f(x) + g(x))' = f'(x) + g'(x); \tag{36}$$

2) производные произведения и частного двух дифференцируемых функций вычисляются по формулам:

$$(f(x) \cdot g(x))' = f'(x) \cdot g(x) + f(x) \cdot g'(x), \tag{37}$$

$$\left(\frac{f(x)}{g(x)}\right)' = \frac{f'(x) \cdot g(x) - f(x) \cdot g'(x)}{g^2(x)};$$

3) производная сложной функции вычисляется следующим образом:

$$(f(g(x)))' = f'(g(x)) \cdot g'(x). \tag{38}$$

В частности, для линейной функции $g(x) = kx + b$:

$$(f(kx + b))' = kf'(kx + b). \tag{39}$$

Примеры решения задач

Пример 1. (ЕГЭ.А) Найти производную функции $y = 3\cos x + x^2$.

Решение. Согласно (36) имеем:

$$y' = (3\cos x + x^2)' = 3(\cos x)' + (x^2)'.$$

Далее, применив (32) и (31), получим: $y' = -3\sin x + 2x$.

Ответ. $-3\sin x + 2x$.

Пример 2. (ЕГЭ) Точка движется по координатной прямой согласно закону $x(t) = 3 + 2t + t^2$, где $x(t)$ – координата точки в момент времени t. В какой момент времени скорость точки будет равна 5?

Решение. Так как скорость точки в момент времени t есть значение производной $x'(t)$, то нам надо найти t такое, что $x'(t) = 5$. Поэтому

$$x'(t) = 5 \quad \Longleftrightarrow \quad 2 + 2t = 5 \quad \Longleftrightarrow \quad t = \frac{3}{2}.$$

Ответ. $\frac{3}{2}$.

Пример 3. (ЕГЭ) Найти угловой коэффициент касательной, проведённой к графику функции $f(x) = 2x + e^x$ в точке с абсциссой $x_0 = 0$.

Решение. Тангенс угла наклона касательной в точке с абсциссой x_0 равен значению $f'(x_0)$. Поскольку $f'(x) = 2 + e^x$, искомый угловой коэффициент равен

$$f'(0) = 2 + e^0 = 2 + 1 = 3.$$

Ответ. 3.

Задачи

1. (ЕГЭ) Найти значение производной функции $y = x^2 + \sin x$ в точке $x_0 = \pi$.
2. (ЕГЭ) Найти $f'(1)$, если $f(x) = \dfrac{5}{x} + 4e^x$.
3. (ЕГЭ) Найти скорость точки, движущейся прямолинейно по закону $x(t) = \dfrac{t^2}{4}$, в момент времени $t_0 = 4$.
4. (ЕГЭ) Решить уравнение $f'(x) = 0$, если $f(x) = (3x^2 + 1)(3x^2 - 1)$.
5. (ЕГЭ) Найти значение производной функции $y = x^2 e^x$ в точке $x_0 = 1$.
6. (ЕГЭ) Найти значение производной функции $y = x \ln x$ в точке $x_0 = e$.
7. (ЕГЭ) Найти значение производной функции $y = \dfrac{2 - x}{x}$ в точке $x_0 = 0,5$.
8. (ЕГЭ) Найти значение производной функции $y = \dfrac{e^x}{x}$ в точке $x_0 = 2$.
9. (ЕГЭ) Найти угловой коэффициент касательной, проведённой к графику функции $y = 4x^3 - 6x^2 + 9$ через точку с абсциссой $x_0 = 1$.
10. (ЕГЭ) Найти угловой коэффициент касательной к графику функции $y = 3\sin x + 12x$ в точке с абсциссой $x_0 = -\dfrac{\pi}{2}$.
11. (ЕГЭ) Найти тангенс угла наклона касательной, проведённой к графику функции $y = -\dfrac{4}{x}$ в точке с абсциссой $x_0 = -2$.

8.2. Исследование функций с помощью производной

Теоретический материал и примеры решения задач

С помощью производных можно находить промежутки[2] возрастания и убывания функций:

- если $f'(x) > 0$ во всех точках некоторого промежутка, то $f(x)$ возрастает на этом промежутке[3];
- если $f'(x) < 0$ во всех точках некоторого промежутка, то $f(x)$ убывает на этом промежутке.

Наглядный смысл признака возрастания (убывания) функции ясен из физических рассуждений.

Пусть точка движется по оси ординат согласно закону $y = f(t)$, тогда её скорость в момент времени t равна $f'(t)$. Если $f'(t) > 0$ в каждый момент времени t из промежутка I, то точка движется в положительном направлении оси ординат, то есть если $t_1 < t_2$, то $f(t_1) < f(t_2)$. Это означает, что функция $f(t)$ возрастает на промежутке I.

З а м е ч а н и е. Если функция $f(x)$ непрерывна в каком-либо из концов промежутка возрастания (убывания), то эта точка присоединяется к этому промежутку.

П р и м е р 1. Производная функции $f(x) = x^3$ равна $f'(x) = 2x^2$; она положительна на $(-\infty; 0)$ и $(0; +\infty)$. Согласно признаку возрастания $f(x)$ возрастает на $(-\infty; 0)$ и $(0; +\infty)$, а согласно замечанию точка $x = 0$ присоединяется к каждому из промежутков. В результате получаем, что $f(x) = x^3$ возрастает на $(-\infty; +\infty)$.

Экстремумы

О п р е д е л е н и е. Функция $f(x)$ имеет в точке x_0 *строгий локальный максимум* (сокращённо *максимум*), если её значение в точке x_0 больше других значений вблизи[4] этой точки.

О п р е д е л е н и е. Функция $f(x)$ имеет в точке x_0 *строгий локальный минимум* (сокращённо *минимум*), если её значение в точке x_0 меньше других значений вблизи этой точки.

С помощью производной можно вычислить экстремум (максимум или минимум) функции, руководствуясь правилом: если функция $f(x)$ имеет в точке $x = x_0$ экстремум, то в этой точке производная либо равна нулю, либо не существует.

Проиллюстрируем это утверждение с помощью геометрического смысла производной.

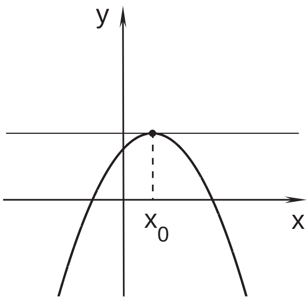
Пусть точка x_0 является точкой максимума функции $y = f(x)$. Возможен только один из следующих двух вариантов:

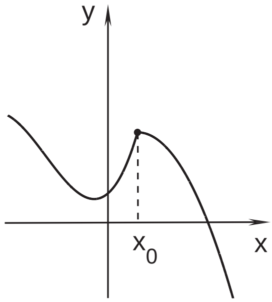
---

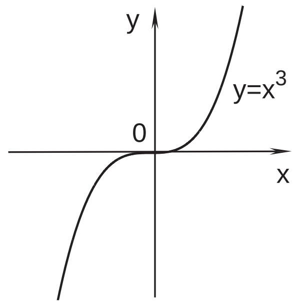
[2] Под промежутком подразумевается одно из следующих подмножеств прямой: интервал, отрезок, полуинтервал, луч (как содержащий, так и не содержащий начальную точку), а также вся прямая.

[3] Это условие не является необходимым, а является только достаточным. См. замечание и пример 1.

[4] То есть существует интервал $(a; b)$, содержащий точку x_0, такой, что для любого $x \in (a; b)$, отличного от x_0, справедливо $f(x) < f(x_0)$.







1) если производная в точке x_0 определена, то она равна нулю, то есть функция имеет в этой точке горизонтальную касательную (левый рисунок);

2) производной в точке x_0 не существует, то есть функция не имеет в точке x_0 касательной (центральный рисунок).

Замечание. Точка x_0, в которой производная функции $y = f(x)$ обращается в ноль, может и не являться точкой экстремума. Например, для функции $y = x^3$ производная $y' = 3x^2$ обращается в ноль при $x_0 = 0$, однако, эта точка не является точкой экстремума, так как слева и справа от неё функция $y = x^3$ возрастает (правый рисунок). Поэтому равенство нулю производной является лишь необходимым условием.

Одним из достаточных условий экстремума является смена знака производной при переходе через точку, в которой производная равна нулю или не существует.

Пример 2. (ЕГЭ) Найти минимум[5] функции $y = \dfrac{x^3}{3} + \dfrac{x^2}{2} - 2x + 7\dfrac{1}{6}$.

Решение. Для начала вычислим производную функции y:

$$y' = x^2 + x - 2 = (x+2)(x-1).$$

Производная обращается в ноль в точках $x_1 = -2,\ x_2 = 1$.

При переходе через точку $x = -2$ производная меняет знак с плюса на минус, это значит, что сама функция сначала возрастала, а потом стала убывать и, следовательно, точка $x = -2$ является точкой максимума функции y.

При переходе через точку $x = 1$ производная меняет знак с минуса на плюс, это значит, что сама функция сначала убывала, а потом стала возрастать и, следовательно, точка $x = 1$ является точкой минимума функции y. Сам минимум равен

$$y(1) = \frac{1}{3} + \frac{1}{2} - 2 + 7\frac{1}{6} = 6.$$

Ответ. 6.

[5] В задачах ЕГЭ под минимумом подразумевается строгий локальный минимум – не путать с наименьшим значением.

Пример 3. (ЕГЭ) При каком наибольшем значении a функция $f(x)=\dfrac{2}{3}x^3-ax^2+7ax+5$ возрастает на всей числовой прямой?

Решение. Исследуем знаки производной в зависимости от значений параметра a. Производная

$$f'(x)=2x^2-2ax+7a.$$

Если квадратное уравнение $2x^2-2ax+7a=0$ имеет корни $x_1\neq x_2$, то $f'(x)<0$ на интервале $(x_1;x_2)$. Следовательно, на этом интервале $f(x)$ убывает, и этот случай нам не подходит.

Если квадратное уравнение $2x^2-2ax+7a=0$ не имеет корней, то $f'(x)>0$ на всей числовой прямой, и этот случай нам подходит.

Если же квадратное уравнение $2x^2-2ax+7a=0$ имеет только один корень x_0, то $f'(x)>0$ на $(-\infty;x_0)$ и $(x_0;+\infty)$, а согласно замечанию точка x_0 присоединяется к каждому из промежутков. В результате получаем, что $f(x)$ возрастает на $(-\infty;+\infty)$.

Итак, нас устраивает случай, когда квадратное уравнение $2x^2-2ax+7a=0$ либо не имеет корней, либо имеет только один корень, то есть случай, когда $D\leq 0$. Таким образом,

$$D\leq 0 \iff \frac{D}{4}=a^2-14a\leq 0 \iff a\in[0;14].$$

Наибольшее значение $a=14$.

Ответ. 14.

Пример 4. (ЕГЭ) Найти наибольшее значение площади прямоугольника со сторонами, параллельными осям координат, и диагональю OP, где O – начало координат, а P – точка на графике функции $y=\dfrac{3}{x}+16x^2e^{3-4x}$; $0,4\leq x\leq 1$.

Решение. Пусть A и B – проекции точки P на оси координат. Тогда искомая площадь равна

$$S=OA\cdot OB=y\cdot x=3+16x^3e^{3-4x}.$$

Наибольшее значение функция S принимает либо в точке локального максимума, либо на конце отрезка $[0,4;1]$. Сначала вычислим значение S на концах отрезка:

$$S_1=S(0,4)=3+16\cdot 0,4^3e^{3-4\cdot 0,4}=3+1,024e^{1,4};$$

$$S_2=S(1)=3+\frac{16}{e}.$$

Теперь вычислим значение S в точке локального экстремума. Найдём нули производной:

$$S'=0 \iff 16(x^3e^{3-4x})'=0 \iff (x^3)'e^{3-4x}+x^3(e^{3-4x})'=0 \iff$$

$$\iff 3x^2e^{3-4x}+x^3e^{3-4x}(-4)=0 \iff x^2e^{3-4x}(3-4x)=0.$$

На отрезке $[0,4;1]$ это уравнение имеет единственный корень $x=\dfrac{3}{4}$, значение S в этой точке равно

$$S_3 = S\left(\frac{3}{4}\right) = 3 + 16\left(\frac{3}{4}\right)^3 = \frac{39}{4} = 9\frac{3}{4}.$$

Покажем, что $S_2 < S_3$. Для этого воспользуемся оценкой $2,4 < e < 3$:

$$S_2 = 3 + \frac{16}{e} < 3 + \frac{16}{2,4} = 3 + \frac{20}{3} = 9\frac{2}{3} < 9\frac{3}{4} = S_3.$$

Теперь сравним S_3 и S_1:

$$\begin{array}{rcl} S_3 & \vee & S_1 \\ 9\dfrac{3}{4} & \vee & 3+1,024e^{1,4} \\ 6\dfrac{3}{4} & \vee & 1,024e^{1,4} \\ \dfrac{27}{4} & \vee & 1,024e^{1,4} \\ 27 & \vee & 4\cdot 1,024e^{1,4} \\ 27 & \vee & 4,096e^{1,4}. \end{array}$$

Так как $5\cdot 3^{3/2} > 4,096e^{1,4}$, то, доказав неравенство $27 > 5\cdot 3^{3/2}$, мы получим, что $27 > 4,096e^{1,4}$. Итак, сравним 27 и $5\cdot 3^{3/2}$:

$$\begin{array}{rcl} 27 & \vee & 5\cdot 3^{3/2} \\ 27 & \vee & 5\cdot\sqrt{27} \\ \sqrt{27} & \vee & 5 \\ 27 & \vee & 25. \end{array}$$

Так как $27 > 25$, то $27 > 4,096e^{1,4}$ и $S_3 > S_1$. Следовательно, наибольшее значение площади прямоугольника равно $S_3 = 9,75$.

Ответ. $9,75$.

Задачи

1. (ЕГЭ) Найдите максимум функции $y = -\dfrac{x^3}{3} - \dfrac{x^2}{2} + 2x + 8\dfrac{5}{6}$.

2. (ЕГЭ) Найдите минимум функции $f(x) = x + \dfrac{1}{x}$.

3. (ЕГЭ) Найдите минимум функции $f(x) = x^2 + \dfrac{1}{x^2} - 2$.

4. (ЕГЭ) Найдите минимум функции $y = 5\dfrac{3}{4} + 3x + \dfrac{x^2}{2} - x^3 - \dfrac{x^4}{4}$.

5. (ЕГЭ) При каком наибольшем значении b функция $f(x) = x^3 + bx^2 + 3bx - 1$ возрастает на всей числовой прямой?

6. (ЕГЭ) При каком наибольшем значении m функция $f(x) = -\dfrac{1}{2}x^3 + mx^2 - 4mx + 3$ убывает на всей числовой прямой?

7. (ЕГЭ) Найдите длину промежутка возрастания функции $y = \dfrac{5x}{x^2+1}$.

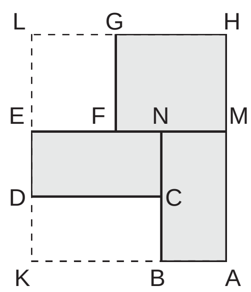
8. (ЕГЭ) При каком натуральном значении параметра a уравнение $x^3 + 3x^2 - 9x - a = 0$ имеет ровно два корня?

9. (ЕГЭ) При каком наименьшем целом значении параметра p уравнение $\dfrac{1}{3}x^3 + \dfrac{1}{2}x^2 - 6x = p$ имеет 3 корня?

10. (ЕГЭ) Найдите середину промежутка убывания функции $f(x) = x - 2\ln x$.

11. (ЕГЭ) Точка A лежит на графике функции $y = f(x)$, точка B – на оси Ox, и её абсцисса в четыре раза больше ординаты точки A. Найдите наибольшее значение площади треугольника AOB, где точка O – начало координат, а
$$f(x) = \sqrt{7 + 3\sin x - (3x+1)\cos x}, \quad \frac{3\pi}{4} \le x \le \frac{9\pi}{8}.$$

12. (ЕГЭ) Требуется разместить на земле участок $ABCDEFGH$ площадью 1800 м^2, состоящий из трех прямоугольных частей и имеющий форму, изображенную на рисунке, где $FG = EF = 10$ м, $BC = 15$ м и $CD \ge 40$ м. Найдите наименьшее значение периметра такого участка и какие-либо значения длин KL, LH и CD, при которых периметр является наименьшим.



8.3. Первообразные элементарных функций, основные правила нахождения первообразных. Вычисление площади плоской фигуры с помощью первообразной

Теоретический материал и примеры решения задач

Определение. Непрерывная и дифференцируемая функция $F(x)$ называется *первообразной* для функции $f(x)$ на заданном промежутке, если для всех x из этого промежутка
$$F'(x) = f(x).$$

П р и м е р 1. Функция $F(x)=\dfrac{x^3}{3}$ является первообразной для функции $f(x)=x^2$ на промежутке $(-\infty;+\infty)$, так как

$$F'(x)=\left(\frac{x^3}{3}\right)'=x^2=f(x).$$

Заметим, что $\dfrac{x^3}{3}+5$ имеет также производную x^2 и поэтому также является первообразной для функции $f(x)=x^2$ на $(-\infty;+\infty)$.

В общем случае справедливо следующее утверждение: любая первообразная функции $f(x)$ на промежутке I может быть представлена в виде

$$F(x)+C,$$

где C – произвольная постоянная, а $F(x)$ – одна из первообразных функции $f(x)$ на промежутке I.

П р и м е р 2. Функция $F(x)=\dfrac{1}{x}$ не является первообразной для $f(x)=-\dfrac{1}{x^2}$ на промежутке $(-\infty;+\infty)$, так как в точке $x=0$ равенство $F'(x)=f(x)$ не выполняется. Но на каждом из промежутков $(-\infty;0)$ и $(0;+\infty)$ функция $F(x)$ будет первообразной для $f(x)$.

Приведём для основных элементарных функций соответствующие им первообразные:

$$f(x)=x^a \quad (a\in\mathbb{R},\ a\neq -1), \qquad F(x)=\frac{x^{a+1}}{a+1}+C; \tag{40}$$

$$f(x)=\sin x, \qquad F(x)=-\cos x+C; \tag{41}$$

$$f(x)=\cos x, \qquad F(x)=\sin x+C; \tag{42}$$

$$f(x)=\frac{1}{\cos^2 x}, \qquad F(x)=\operatorname{tg} x+C; \tag{43}$$

$$f(x)=\frac{1}{\sin^2 x}, \qquad F(x)=-\operatorname{ctg} x+C; \tag{44}$$

$$f(x)=e^x, \qquad F(x)=e^x+C; \tag{45}$$

$$f(x)=\frac{1}{x}, \qquad F(x)=\ln|x|+C. \tag{46}$$

При вычислении производных мы пользовались тем, что постоянный множитель можно выносить за знак производной и производная суммы двух функций равна сумме их производных. Эти же правила используются при нахождении первообразных.

П р и м е р 3. Найти первообразную F функции $f(x) = e^x + \sin x$, если известно, что $F(0) = -1$.

Р е ш е н и е. Так как первообразная суммы двух функций равна сумме первообразных, то сначала, используя (45) и (41), найдём первообразные каждого из слагаемых, а потом их сложим. Получим

$$F(x) = e^x - \cos x + C,$$

где C – произвольная постоянная. Теперь выберем из множества всех первообразных ту, которая удовлетворяет условию $F(0) = -1$. Для этого определим значение константы C из условия

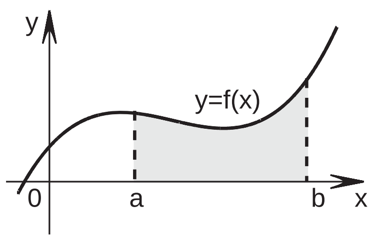
$$F(0) = e^0 - \cos 0 + C = -1 \quad \Longleftrightarrow \quad C = -1,$$

следовательно, $F(x) = e^x - \cos x - 1$.

О т в е т. $F(x) = e^x - \cos x - 1$.

Вычисление площади плоской фигуры с помощью первообразной

Рассмотрим на отрезке $[a; b]$ непрерывную знакопостоянную функцию $y = f(x)$. Фигуру, ограниченную графиком этой функции, осью Ox и прямыми $x = a$ и $x = b$, называют *криволинейной трапецией*.



Для вычисления площадей криволинейных трапеций применяется следующая теорема.

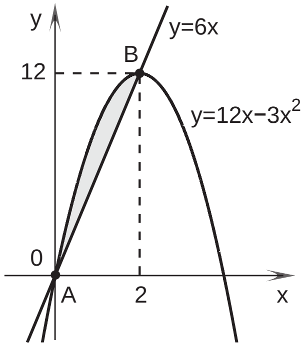
Теорема. Если $f(x)$ – непрерывная неотрицательная на отрезке $[a; b]$ функция, а $F(x)$ – её первообразная на этом отрезке, то площадь S соответствующей криволинейной трапеции равна приращению первообразной на отрезке $[a; b]$, то есть

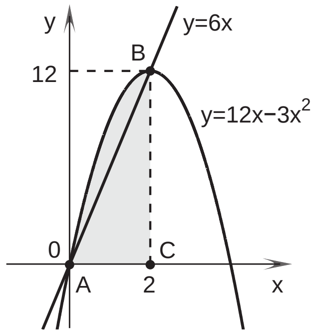
$$S = F(b) - F(a).$$

П р и м е р 4. Вычислить площадь фигуры, ограниченной прямой $y = 6x$ и параболой $y = 12x - 3x^2$.

Р е ш е н и е. Построим на координатной плоскости графики этих функций. Координаты точек их пересечения найдём из системы:

$$\begin{cases} y = 6x, \\ y = 12x - 3x^2; \end{cases} \quad \Longleftrightarrow \quad \begin{cases} \left[\begin{array}{l} x = 0; \\ y = 0; \end{array} \right. \\ \left[\begin{array}{l} x = 2; \\ y = 12; \end{array} \right. \end{cases}$$





следовательно, графики пересекаются в точках $A(0;0)$ и $B(2;12)$. Для того чтобы вычислить интересующую нас площадь, надо из площади, находящейся под параболой, вычесть площадь, находящуюся под прямой. Площадь криволинейной трапеции ABC равна

$$S_1 = F(2) - F(0),$$

где первообразная функции $y = 12x - 3x^2$ равна $F(x) = 6x^2 - x^3$. Следовательно,

$$S_1 = F(2) - F(0) = 16 - 0 = 16.$$

Площадь под прямой есть площадь прямоугольного треугольника ABC, где $C(2;0)$. Поэтому здесь нет необходимости использовать первообразную:

$$S_2 = \frac{1}{2} AC \cdot BC = \frac{1}{2} \cdot 2 \cdot 12 = 12.$$

Искомая площадь равна $S_1 - S_2 = 16 - 12 = 4$.

О т в е т. 4.

Задачи

1. (ЕГЭ) Указать первообразную функции $f(x) = x + \cos x$.

2. (ЕГЭ) Указать первообразную функции $f(x) = 2x + \dfrac{1}{x}$ на промежутке $(0;+\infty)$.

3. (ЕГЭ) Указать первообразную функции $f(x) = 2 - e^x$.

4. (ЕГЭ) Найти первообразную F функции $f(x) = e^x + \cos x$, если известно, что $F(0) = -1$.

5. (ЕГЭ) Известно, что $F(x)$ – первообразная функции $f(x) = -18x^2 - 7$ и $F(0) = 0$. Найти $F(1)$.

6. (ЕГЭ) Для функции $f(x) = 2\cos x$ указать первообразную F, график которой проходит через точку $M\left(\dfrac{\pi}{2};0\right)$.

7. (ЕГЭ) Вычислить площадь фигуры, ограниченной линиями $y = x^2 - 2x + 5$; $x = 0$; $x = 3$; $y = 0$.

8. (ЕГЭ) Вычислить площадь фигуры, ограниченной линиями $y = 3\sqrt{x}$ и $y = \dfrac{3}{4}x + 2\dfrac{1}{4}$.

9. (ЕГЭ) Вычислить площадь фигуры, ограниченной линиями $y = 2\sin\dfrac{1}{2}x$, $y = \sin x$, $y = 0$ при $0 \le x \le 2\pi$.

10. (ЕГЭ) Найти значение выражения $2S$, если S – площадь фигуры, ограниченной линиями $y = x^2 + 1$ и $y + x = 3$.

11. (ЕГЭ) Найти значение выражения $6S$, если S – площадь фигуры, ограниченной графиком функции $y = x^2 - 2x + 1$ и графиком её производной.

9. Текстовые задачи

В этом параграфе, в отличие от §4, рассматриваются более сложные задачи, приводящие к нелинейным уравнениям и системам. Рассматриваются также задачи на целые числа с перебором вариантов и отбором решений.

9.1. Скорость, движение и время

Теоретический материал

В этом разделе собраны задачи на движение. При составлении систем для таких задач требуется лишь здравый смысл и знание того, что

$$\text{расстояние} = \text{скорость} \cdot \text{время}.$$

Примеры решения задач

Пример 1. (М/м-87.4) Два поезда выехали одновременно в одном направлении из городов A и B, расположенных на расстоянии 60 км друг от друга, и одновременно прибыли на станцию C. Если бы один из них увеличил свою скорость на 25 км/ч, а другой – на 20 км/ч, то они прибыли бы одновременно на станцию C, но на 2 часа раньше. Найти скорости поездов.

Решение. Обозначим за x и y км/ч соответственно скорости первого и второго поездов, за a км – расстояние BC. Условие одновременного прибытия в точке C записывается уравнением:

$$\frac{a+60}{x} = \frac{a}{y}, \quad x > 0, \quad y > 0, \quad a > 0;$$

так как явно не сказано, какой именно из поездов увеличил скорость на 20 км/ч, а какой на 25 км/ч, с формальной точки зрения получаем совокупность:

$$\frac{a+60}{x+25} = \frac{a}{y+20} = \frac{a}{y} - 2 \qquad \text{или} \qquad \frac{a+60}{x+20} = \frac{a}{y+25} = \frac{a}{y} - 2.$$

1) Рассмотрим первый случай:

$$\begin{cases} \dfrac{a+60}{x} = \dfrac{a}{y}, \\ \dfrac{a+60}{x+25} = \dfrac{a}{y+20}, \\ \dfrac{a}{y+20} = \dfrac{a}{y} - 2; \end{cases}$$

почленно делим первое уравнение на второе:

$$\frac{x+25}{x} = \frac{y+20}{y}, \quad \text{откуда} \quad x = \frac{5}{4}y;$$

подставляем в первое уравнение: $\dfrac{4}{5}(a+60) = a \iff a = 240$ км; подставляем в третье уравнение: $\dfrac{240}{y+20} = \dfrac{240}{y} - 2 \iff y = 40$ км/ч. Тогда $x = 50$ км/ч.

2) Рассмотрим второй случай:

$$\begin{cases} \dfrac{a+60}{x} = \dfrac{a}{y}, \\ \dfrac{a+60}{x+20} = \dfrac{a}{y+25}, \\ \dfrac{a}{y+25} = \dfrac{a}{y} - 2; \end{cases}$$

почленно делим первое уравнение на второе:

$$\frac{x+20}{x} = \frac{y+25}{y}, \quad \text{откуда} \quad x = \frac{4}{5}y;$$

подставляем в первое уравнение: $\dfrac{5}{4}(a+60) = a \iff a = -300 < 0$; значит, данный вариант не подходит.

Ответ. 50 км/ч; 40 км/ч.

Задачи

1. (Геол-00.3) От причала A к причалу B отплыли катер и лодка, причём скорость катера в 5 раз больше скорости лодки. Известно, что они плыли с постоянными скоростями, но катер сделал несколько остановок. Сколько времени катер затратил на все остановки, если он доплыл до причала B за 2 часа, а лодка за 4 часа?

2. (Биол-87.2) Из пункта A по реке отправляется плот. Одновременно навстречу ему отправляется катер из пункта B, расположенного ниже по течению относительно пункта A. Встретив плот, катер сразу поворачивает и идет вниз по течению. Найти, какую часть пути от A до B пройдёт плот к моменту возвращения катера в пункт B, если скорость катера в стоячей воде вчетверо больше скорости течения реки.

3. (ВМК-99(1).1) Пункты A, B, C и D расположены на одной прямой в указанной последовательности. Пешеход выходит из пункта A со скоростью 5 км/час и направляется в пункт D. Достигнув пункта D, он поворачивает обратно и доходит до пункта B, затратив на всю дорогу 5 час. Известно, что расстояние между A и C он прошел за 3 часа, а расстояния между A и B, B и C, C и D (в заданном порядке) образуют геометрическую прогрессию. Найти расстояние между B и C.

4. (Геогр-77.4) Грузовик и гоночный автомобиль выехали одновременно из пункта A и должны прибыть в пункт C. Грузовик, двигаясь с постоянной скоростью, доехал до пункта C, проделав путь, равный 360 км. Гоночный автомобиль поехал по окружной дороге и сначала доехал до пункта B, расположенного в 120 км от пункта A, двигаясь со скоростью, вдвое большей скорости грузовика. После пункта B он увеличил свою скорость на 40 км/ч и проехал путь от пункта B до пункта C, равный 1000 км. Он прибыл в пункт C на 1 час 15 минут позднее грузовика. Если бы гоночный автомобиль весь свой путь от пункта A до пункта C ехал с той же скоростью, что и от пункта B до пункта C, то в пункт C он прибыл бы на 1 час позднее грузовика. Найти скорость грузовика.

5. (ВКНМ-99(1).3) Из города в деревню одновременно отправились бегун Б и пешеход Π_1, а в тот же момент из деревни в город вышел пешеход Π_2. Скорости пешеходов были равны. Встретившись, Б и Π_2 некоторое время стояли на месте, а затем направились в деревню. При этом Б побежал с прежней скоростью, равной 12 км/ч, а Π_2 уменьшил свою скорость в полтора раза. В результате в деревню сначала прибежал Б, а затем через промежуток времени, в два раза больший длительности встречи Б и Π_2, одновременно пришли оба пешехода. Найти скорость пешехода Π_1.

6. (Хим-81.3) Из города A в город B выехал автомобиль. Одновременно с ним из пункта C, расположенного между A и B, в город A выехал второй автомобиль. Первый прибыл в B одновременно с прибытием второго в A. Затем автомобили одновременно выехали навстречу друг другу, встретились в пункте D и одновременно прибыли первый в A, второй в B. Каждый автомобиль ехал со своей постоянной скоростью, но второй сделал остановку на пути от C к A, а первый – остановку той же продолжительности на пути от B к D. Найти расстояние между C и D, если известно, что расстояние от A до C равно 270 км, а расстояние от C до B равно 180 км.

7. (ВМК-92.4) Из города A в город B выехал автомобиль. Спустя некоторое время из B в A по той же дороге выехал мотоцикл. Скорости автомобиля и мотоцикла на всем пути постоянны. Автомобиль до встречи с мотоциклом находился в пути 7 часов 30 минут, а мотоцикл до встречи ехал 3 часа. Мотоцикл прибыл в A в 23 часа, а автомобиль прибыл в B в 16 часов 30 минут того же дня. Найти время отправления мотоцикла из города B.

9.2. Арифметическая и геометрическая прогрессии

Перед тем, как приступить к решению задач этого раздела необходимо повторить соответствующие определения и формулы, приведённые в разделе 4.2, стр. 46.

Примеры решения задач

П р и м е р 1. (Геогр-99(1).2) Сумма первых пяти членов возрастающей геометрической прогрессии равна 15, а их произведение равно 1155. Найти шестидесятый член прогрессии.

Р е ш е н и е. Обозначим за d разность прогрессии, $a_3 = x$; получаем систему уравнений:

$$\begin{cases} (a_3 - 2d) + (a_3 - d) + a_3 + (a_3 + d) + (a_3 + 2d) = 15, \\ (a_3 - 2d)(a_3 - d)a_3(a_3 + d)(a_3 + 2d) = 1155; \end{cases} \iff$$

$$\iff \begin{cases} 5x = 15, \\ (x^2 - 4d^2)(x^2 - d^2)x = 1155. \end{cases}$$

Из первого уравнения системы получаем $x = 3$ и подставляем во второе:

$$(9 - 4d^2)(9 - d^2) = 385 \iff 4d^4 - 45d^2 - 304 = 0,$$

откуда $d^2 = 16$, то есть $d = 4$ с учётом условия $d > 0$. Следовательно,

$$a_{60} = a_1 + 59d = a_3 - 2d + 59d = 3 + 57 \cdot 4 = 231.$$

О т в е т. 231.

П р и м е р 2. (Псих-00.2) Рассматриваются геометрические прогрессии, у каждой из которых первый член равен десяти, сумма второго и третьего членов равна целому числу, кратному четырём, и не превосходит одной тысячи, а знаменатель больше единицы. Указать знаменатели всех таких прогрессий.

Р е ш е н и е. Если первый член геометрической прогрессии равен 10, то второй и третий равны $10q$ и $10q^2$, где q знаменатель прогрессии. По условию задачи $10q + \ 10q^2 = 4n \leq 1000$, где $n \in \mathbb{Z}$. Следовательно, $n \leq 250$ и

$$q^2 + q - \frac{2n}{5} = 0 \iff q = \frac{-1 \pm \sqrt{1 + \frac{8n}{5}}}{2}.$$

Так как по условию $q > 1$, то корень $q = \dfrac{-1 - \sqrt{1 + \frac{8n}{5}}}{2}$ не подходит. Отберём n, при которых второй корень больше единицы:

$$\frac{-1 + \sqrt{1 + \frac{8n}{5}}}{2} > 1 \iff \sqrt{1 + \frac{8n}{5}} > 3 \iff n > 5.$$

В результате получаем $q = \dfrac{-1 + \sqrt{1 + \frac{8n}{5}}}{2}$ при $n = 6, 7, ..., 250$.

О т в е т. $\dfrac{-1 + \sqrt{1 + \frac{8n}{5}}}{2}$ при $n = 6, 7, ..., 250$.

Задачи

1. (Геол-94.1) Какое из двух чисел больше: $2\sqrt{17}$ или $8,(24)$?

2. (Почв-00.2) Первый, второй и четвёртый члены арифметической прогрессии одновременно являются соответственно первым, вторым и третьим членами некоторой геометрической прогрессии. Найдите все значения, которые может принимать знаменатель этой геометрической прогрессии.

3. (ВМК-90.2) Числа $a_1, a_2, \ldots, a_{21}$ образуют арифметическую прогрессию. Известно, что сумма членов этой прогрессии с нечётными номерами на 15 больше суммы членов с чётными номерами. Найти a_{12}, если $a_{20} = 3a_9$.

4. (М/м-97(2).2) Даны арифметическая и геометрическая прогрессии. Сумма их первых членов равна (-3), сумма третьих членов равна 1, а сумма пятых членов равна 5. Найти разность арифметической прогрессии.

5. (ЕГЭ.С) Четыре числа образуют геометрическую прогрессию. Если к ним прибавить соответственно 2, 5, 7 и 7, то получим четыре числа, образующих арифметическую прогрессию. Найдите числа, образующие геометрическую прогрессию.

6. (ЕГЭ.С) Сумма утроенного второго и четвёртого членов арифметической прогрессии равна 12. При каком значении разности прогрессии произведение третьего и пятого членов прогрессии будет наименьшим?

7. (Геол-80.4) В гору ехал автомобиль. В первую секунду после достижения пункта A он проехал 30 м, а в каждую следующую секунду он проезжал на 2 м меньше, чем в предыдущую. Через 9 с после того, как автомобиль достиг пункта A, навстречу ему выехал автобус из пункта B, находящегося на расстоянии 258 м от пункта A. В первую секунду автобус проехал 2 м, а в каждую следующую секунду он проезжал на 1 м больше, чем в предыдущую. Какое расстояние проехал автобус до встречи с автомобилем?

8. (М/м-00(1).2) О первых семи членах убывающей арифметической прогрессии известно, что сумма пятых степеней всех этих членов равна нулю, а сумма их четвёртых степеней равна 51. Найти седьмой член этой прогрессии.

9. (ВМК-94(2).5) В начальный момент лечения пациенту была произведена первая инъекция 6 единиц некоторого лекарства, а во время каждой последующей инъекции ему вводится 4 единицы того же лекарства. За время между инъекциями количество лекарства в организме уменьшается в 5 раз. Какое количество лекарства будет содержаться в организме пациента сразу после 30-й инъекции?

10. (Соц-98.5) Найти все натуральные значения параметра n, при каждом из которых задача: «Найти арифметическую прогрессию, если известны её семнадцатый член и сумма n первых членов» не имеет решений или её решением является бесконечное множество арифметических прогрессий.

9.3. Концентрация, смеси и сплавы, массовые и объёмные доли

Теоретический материал

Все задачи этого раздела сводятся к системам линейных или квадратных уравнений. При решении задач на сплавы и смеси надо помнить, что

$$\text{концентрация вещества}\,(\%) = \frac{\text{масса вещества}}{\text{полная масса раствора (сплава)}} \cdot 100\,\%.$$

Примеры решения задач

П р и м е р 1. (Геогр-81.3) Имеется два раствора серной кислоты в воде: первый – 40 %-й, второй – 60 %-й. Эти два раствора смешали, после чего добавили 5 кг чистой воды и получили 20 %-й раствор. Если бы вместо 5 кг чистой воды добавили 5 кг 80 %-го раствора, то получился бы 70 %-й раствор. Сколько было 40 %-го и 60 %-го растворов?

Р е ш е н и е. Пусть количество 40 %-го раствора составляет x кг, а количество 60 %-го раствора – y кг. При смешивании x кг 40 %-го раствора, y кг 60 %-го раствора и 5 кг чистой воды получается раствор массой $(x+y+5)$ кг, содержащий 20 % кислоты по условию. Поскольку в x кг 40 %-го раствора кислоты содержится $\frac{x}{100} \cdot 40 = 0,4x$ кг, а в y кг 60 %-го раствора содержится $0,6y$ кг кислоты, то в $(x+y+5)$ кг полученного раствора содержится $(0,4x+0,6y)$ кг кислоты, что составляет 20 % от $(x+y+5)$ кг, то есть $0,2(x+y+5)$ кг. Получаем уравнение

$$0,4x + 0,6y = 0,2(x+y+5).$$

Если же вместо 5 кг воды добавить 5 кг 80 %-го раствора, то получится раствор той же массы $(x+y+5)$ кг, но масса кислоты в нём составит $(0,4x+0,6y+0,8\cdot 5)$ кг. Так как полученный раствор по условию 70 %-й, то справедливо равенство

$$0,4x + 0,6y + 0,8 \cdot 5 = 0,7(x+y+5).$$

Итак, x и y можно найти из системы уравнений:

$$\begin{cases} 0,4x + 0,6y = 0,2(x+y+5), \\ 0,4x + 0,6y + 4 = 0,7(x+y+5); \end{cases} \iff \begin{cases} x + 2y = 5, \\ 3x + y = 5; \end{cases} \iff \begin{cases} x = 1, \\ y = 2. \end{cases}$$

О т в е т. 1 кг 40 %-го раствора и 2 кг 60 %-го раствора.

П р и м е р 2. (Геол-91.3) В баке находится 100 литров смеси кислоты с водой. Из бака отлили часть смеси и добавили равное по объёму количество воды, которое на 10 литров превышает первоначальное количество кислоты в смеси. Затем снова отлили такое же количество смеси, как в первый раз, в результате чего количество кислоты в баке уменьшилось в четыре раза по сравнению с количеством её в исходной смеси. Определить количество воды в исходной смеси.

Р е ш е н и е. Проследим за изменением количества кислоты в баке на каждом из этапов. Пусть изначально в баке было x литров кислоты. На первом этапе из бака отлили y литров смеси (причём $y = x + 10$) и долили y литров воды. На втором этапе из бака отлили y литров смеси. Занесём в таблицу характеристики смеси.

	всего смеси	кислота	концентрация	отлили кислоты
1 этап	100 л	x	$\dfrac{x}{100}$	$y \cdot \dfrac{x}{100}$
2 этап	100 л	$x - y\dfrac{x}{100}$	$\dfrac{x - y\frac{x}{100}}{100}$	$y\dfrac{x - y\frac{x}{100}}{100}$

Так как количество кислоты в баке уменьшилось в четыре раза по сравнению с количеством её в исходной смеси, то

$$\left(x - y\frac{x}{100}\right) - y\frac{x - y\frac{x}{100}}{100} = \frac{x}{4} \quad \Longleftrightarrow \quad \left(x - y\frac{x}{100}\right) \cdot \left(1 - \frac{y}{100}\right) = \frac{x}{4} \quad \Longleftrightarrow$$

$$x\left(1 - \frac{y}{100}\right) \cdot \left(1 - \frac{y}{100}\right) = \frac{x}{4} \quad \Longleftrightarrow \quad \left(1 - \frac{y}{100}\right)^2 = \frac{1}{4} \quad \Longleftrightarrow \quad 1 - \frac{y}{100} = \pm\frac{1}{2},$$

откуда $y = 50$ литров или $y = 150$ литров; по смыслу задачи $y < 100$; следовательно, $y = 50$, $x = 40$ и искомая величина $100 - x = 60$ литров.

Ответ. 60 литров.

Задачи

1. (ЕГЭ) Масса первого сплава на 3 кг больше массы второго сплава. Первый сплав содержит 10 % цинка, второй 40 % цинка. Новый сплав, полученный из двух первоначальных, содержит 20 % цинка. Определите массу нового сплава.

2. (ЕГЭ) Кусок сплава меди с оловом массой 15 кг содержит 20 % меди. Сколько чистой меди необходимо добавить к этому сплаву, чтобы новый сплав содержал 40 % олова?

3. (ЕГЭ) Свежие грибы содержат 92 % воды, а сухие 8 %. Сколько получится сухих грибов из 23 килограммов свежих?

4. (ЕГЭ) К 40 % раствору соляной кислоты добавили 50 г чистой кислоты, после чего концентрация раствора стала равной 60 %. Найдите первоначальный вес раствора.

5. (ЕГЭ) Какое количество воды нужно добавить в 1 литр 9 %-ного раствора уксуса, чтобы получить 3 %-ный раствор?

6. (Филол-00.1) Имеется 40 литров 0,5 % раствора и 50 литров 2 % раствора уксусной кислоты. Сколько нужно взять первого и сколько нужно взять второго раствора, чтобы получить 30 литров 1,5 % раствора уксусной кислоты?

7. (Физ-78.2) Руда содержит 40 % примесей, а выплавленный из неё металл содержит 4 % примесей. Сколько получится металла из 24 тонн руды?

8. (Экон-80.4) Имеются два сплава, состоящие из цинка, меди и олова. Известно, что первый сплав содержит 40 % олова, а второй – 26 % меди. Процентное содержание цинка в первом и втором сплавах одинаково. Сплавив 150 кг первого сплава и 250 кг второго, получили новый сплав, в котором оказалось 30 % цинка. Определить, сколько кг олова содержится в получившемся новом сплаве.

9. (Геол-95.6) Имеются два слитка, содержащие медь. Масса второго слитка на 3 кг больше, чем масса первого слитка. Процентное содержание меди в первом слитке – 10 %, во втором – 40 %. После сплавливания этих двух слитков получился слиток, процентное содержание меди в котором – 30 %. Определить массу полученного слитка.

10. (Геол-96(1).5) В одном декалитре кислотного раствора 96 % объёма составляет кислота. Сколько воды можно долить, чтобы концентрация кислоты в полученном растворе была не больше 40 %?

11. (ВМК-96.2) Первый раствор содержит 20 % азотной кислоты и 80 % воды, второй – 60 % кислоты и 40 % воды. Первая смесь была получена из 15 л первого раствора и некоторого количества второго раствора. Смешав то же самое количество второго раствора с 5 л первого раствора, получили вторую смесь. Сколько литров второго раствора было использовано для приготовления первой смеси, если процентное содержание воды во второй смеси вдвое больше процентного содержания кислоты в первой?

12. (ВМК-00.2) Имеется некоторое количество раствора соли в воде. После испарения из раствора 1 л воды концентрация соли возросла на 0,05, а после разведения получившегося раствора 39 л воды концентрация соли стала в три раза меньше первоначальной. Найти концентрацию соли в исходном растворе, считая массу 1 л воды равной 1 кг.

13. (Экон-79.3) Из сосуда, до краёв наполненного чистым глицерином, отлили 2 литра глицерина, а к оставшемуся глицерину долили 2 литра воды. После перемешивания снова отлили 2 литра смеси и долили 2 литра воды. Наконец, опять перемешали, отлили 2 литра смеси и долили 2 литра воды. В результате этих операций объём воды в сосуде стал на 3 литра больше объёма оставшегося в нем глицерина. Сколько литров глицерина и воды оказалось в сосуде в результате проделанных операций?

14. (Геол-81.5) Для составления смеси из двух жидкостей А и В были взяты два сосуда: первый ёмкостью 10 литров, второй – 20 литров. Сначала в оба сосуда было налито всего 15 литров жидкости А. Затем первый сосуд был дополнен доверху жидкостью В и было произведено перемешивание. После этого второй сосуд был дополнен доверху смесью из первого сосуда. После того как в первый сосуд было добавлено жидкости А столько, сколько было в него её налито сначала, отношения количества жидкости А ко всему объёму имеющейся жидкости в сосуде для первого и второго сосудов стали равными. Сколько литров жидкости А было налито первоначально в первый сосуд?

9.4. Целые числа, перебор вариантов, отбор решений

Теоретический материал

Все задачи этого раздела сводятся к уравнениям и неравенствам в целых числах, решение которых может быть получено перебором.

Для того, чтобы организовать перебор, надо отбросить заведомо неприемлемые варианты.

При решении задач на целые числа полезно использовать делимость целых чисел, разложение на простые сомножители, соображения симметрии.

Рассмотрим некоторые основные приёмы решения уравнений в целых числах.

Разложение на множители

Пусть каким-либо образом удалось получить представление исходного уравнения в виде

$$f_1(x,y,z)\cdot f_2(x,y,z)=d,$$

где d – некоторое целое число, а функции $f_1(x,y,z)$ и $f_2(x,y,z)$ принимают только целочисленные значения при целых x,y,z. После этого следует перебрать всевозможные пары целых чисел (d_1,d_2) такие, что $d_1\cdot d_2=d$, и для каждой такой пары решить систему уравнений

$$\begin{cases} f_1(x,y,z)=d_1, \\ f_2(x,y,z)=d_2. \end{cases}$$

Предполагается, что каждое уравнение системы проще исходного уравнения.

Рассмотрим наиболее типичные преобразования к требуемому виду.

1. Пусть $(ax)^2-(by)^2=d$. Тогда формула разности квадратов приводит к искомому равенству $(ax+by)\cdot(ax-by)=d$.

2. Пусть $ax^2+bxy+cy^2=d$ и квадратный трёхчлен at^2+bt+c раскладывается на множители с целыми коэффициентами. Это означает, что соответствующий дискриминант является полным квадратом. Тогда легко выписать требуемое представление

$$(a_1x+b_1y)\cdot(a_2x+b_2y)=d.$$

В этих рассуждениях a, b, c, d – целые числа.

Использование оценок

Рассматривается уравнение $f_1(x,y,z)+f_2(y,z)+f_3(z)=d$, где f_1, f_2, f_3 – заданные неотрицательные выражения, d – натуральное число. Из уравнения следует неравенство

$$0\le f_3(z)=d-f_1(x,y,z)-f_2(y,z)\le d,$$

откуда определяются возможные значения z. При каждом конкретном z_0 мы будем иметь уравнение

$$f_1(x,y,z_0)+f_2(y,z_0)=d-f_3(z_0).$$

Таким образом, мы свели исходное уравнение к аналогичному уравнению с меньшим числом слагаемых и переменных. Для него аналогичным образом получается неравенство

$$0 \le f_2(y, z_0) \le d - f_3(z_0),$$

откуда для данного z_0 находятся возможные значения y. При каждом конкретном y_0 мы будем иметь уравнение

$$f_1(x, y_0, z_0) = d - f_2(y_0, z_0) - f_3(z_0),$$

откуда находятся целые значения x_0, отвечающие (y_0, z_0), либо делается заключение об отсутствии решений при данных (y_0, z_0). Перебрав все возможные пары (y_0, z_0), найдём все возможные значения x_0.

Примеры решения задач

Пример 1. (У) Найти все пары натуральных чисел p и q, для которых $4p^2 = q^2 - 9$.

Решение. Перепишем уравнение в виде $(q - 2p)(q + 2p) = 9$. Так как p и q – натуральные числа, то $q + 2p \ge 3$, следовательно, возможны только следующие варианты:

$$1)\ \begin{cases} q + 2p = 9, \\ q - 2p = 1; \end{cases} \iff q = 5,\ p = 2;$$

$$2)\ \begin{cases} q + 2p = 3, \\ q - 2p = 3; \end{cases} \iff q = 3,\ p = 0.$$

Так как нас интересуют только натуральные значения, то второй вариант не подходит.

Ответ. $(2; 5)$.

Пример 2. (У) Решить в целых числах уравнение $5x^2 + y^2 + 3z^2 - 2yz = 30$.

Решение. Перепишем уравнение в виде

$$(y - z)^2 + 2z^2 = 30 - 5x^2.$$

Так как левая часть уравнения неотрицательна, то и правая часть уравнения тоже должна быть неотрицательна, то есть

$$30 - 5x^2 \ge 0 \iff x^2 \le 6.$$

Учитывая, что $x \in \mathbb{Z}$, получаем, что x^2 может принимать значения 0; 1; 4.

1) При $x^2 = 0$ получаем уравнение $(y - z)^2 + 2z^2 = 30$ или $(y - z)^2 = 30 - 2z^2$. Из условия $30 - 2z^2 \ge 0$ следует, что $z^2 = 0$; $z^2 = 1$; $z^2 = 4$; $z^2 = 9$, однако ни при одном из этих значений не существует целого y.

2) При $x^2 = 1$ имеем уравнение $(y - z)^2 = 25 - 2z^2$. Из условия $z^2 \le \dfrac{25}{2}$ получаем возможные значения: $z^2 = 0$; $z^2 = 1$; $z^2 = 4$; $z^2 = 9$. Уравнение имеет целые решения только при $z^2 = 0$. В этом случае $y^2 = 25 \iff y = \pm 5$.

3) При $x^2 = 4$ имеем $(y - z)^2 = 10 - 2z^2$. Так как $z^2 \le 5$, то $z^2 = 0$; $z^2 = 1$; $z^2 = 4$. При этих значениях уравнение не имеет целых решений.

Ответ. $(1; 5; 0)$, $(1; -5; 0)$, $(-1; 5; 0)$, $(-1; -5; 0)$.

Пример 3. (ВМК-86.3) В академическом собрании сочинений, включающем менее 20 томов, число томов с художественными произведениями кратно числу томов с письмами, которых, в свою очередь, в три раза меньше, чем томов с публицистикой. Если число томов с художественными произведениями увеличить в два раза, то их станет на 14 больше, чем томов с письмами. Сколько томов с публицистикой содержит собрание сочинений?

Решение. Обозначим количество томов в собрании: n штук с художественными произведениями, l штук с письмами, p штук с публицистикой. Из условия задачи получаем

$$\begin{cases} n = kl, \ n, k, l \in \mathbb{N}, \\ 3l = p, \ p \in \mathbb{N}, \\ n + l + p < 20, \\ 2n = 14 + l; \end{cases}$$

подставляем последовательно $n = kl$ и $p = 3l$ в два последних условия:

$$\begin{cases} kl + l + 3l < 20, \\ 2kl = 14 + l; \end{cases}$$

из второго уравнения следует, что l – чётное; подставляем из уравнения в неравенство: $2kl = l + 14$, то есть $l + 14 + 8l < 40$, откуда $9l < 26$, $l = 2$ или $l = 1$ – нечётное; значит, $l = 2$, $p = 3l = 6$.

Ответ. 6 шт.

Задачи

1. (У) Решить в целых числах уравнение $6x^2 + 5y^2 = 74$.

2. (У) Решить в целых числах уравнение $2x^3 + xy - 7 = 0$.

3. (У) Решить в целых числах уравнение $x^2 - y^2 = 21$.

4. (У) Решить в натуральных числах уравнение $2xy = x^2 + 2y$.

5. (У) Решить в целых числах уравнение $x^2 = y^2 + 2y + 13$.

6. (У) Решить в целых числах уравнение $15x^2 - 11xy + 2y^2 = 7$.

7. (Экон.К-66.1) Группа студентов, состоящая из 30 человек, получила на экзамене оценки «2», «3», «4» и «5». Сумма полученных оценок равна 93, причём «троек» было больше, чем «пятёрок», и меньше, чем «четвёрок». Кроме того, число «четвёрок» делилось на 10, а число «пятёрок» было чётным. Определить, сколько каких оценок получила группа.

8. (Экон-94.1) Найти все целочисленные решения системы $\begin{cases} 7875x^3 = 1701y^3, \\ |x| \le 5. \end{cases}$

9. (Биол-92.4) Найти все пары целых чисел p, q, удовлетворяющие одновременно двум неравенствам $\begin{cases} p^2 + q^2 < 18p - 20q - 166, \\ 32p - q^2 > p^2 + 12q + 271. \end{cases}$

10. (Почв-77.5) Рота солдат прибыла на парад в полном составе прямоугольным строем по 24 человека в ряд. По прибытии оказалось, что не все солдаты могут участвовать в параде. Оставшийся для парада состав роты перестроили так, что число рядов стало на 2 меньше прежнего, а число солдат в каждом ряду стало на 26 больше числа новых рядов. Известно, что если бы все солдаты участвовали в параде, то роту можно было бы выстроить так, чтобы число солдат в каждом ряду равнялось числу рядов. Сколько солдат было в роте?

11. (ВМК-82.4) На заводе было несколько одинаковых прессов, штампующих детали, и завод выпускал 6480 деталей в день. После реконструкции все прессы заменили на более производительные, но также одинаковые, а их количество увеличилось на три. Завод стал выпускать в день 11200 деталей. Сколько прессов было первоначально?

12. (М/м-00(2).2) Два друга, Ваня и Петя, ходили за грибами. Встретившись перед возвращением домой, они обнаружили, что Ваня нашёл 35 грибов, среди которых было несколько подосиновиков, а Петя грибов не нашёл. Ваня взял себе белые грибы, а остальные отдал Пете. Петя, обнаружив среди них червивый подберёзовик, выкинул его. Сколько было найдено подосиновиков, если доля белых в найденных Ваней грибах оказалась равной доле подосиновиков в принесённых Петей домой грибах?

13. (Геол.ОГ-88.5) В пионерский лагерь отправилась автобусная колонна с 510 пионерами, состоящая из «Икарусов» и «Лиазов», причём количество тех и других нечётно. Число пионеров в каждом из «Лиазов» одинаково и кратно трём, а в каждом «Икарусе» – в 1,2 раза больше, чем в одном «Лиазе». Сколько всего автобусов в колонне?

10. Раскрытие модулей в уравнениях и неравенствах различных видов

В этом параграфе предлагаются более сложные и интересные задачи по сравнению с разделом 1.3, в котором рассматривались простейшие задачи с модулями.

10.1. Различные приёмы раскрытия модулей, системы уравнений и неравенств с модулями

Теоретический материал

Напомним определение модуля вещественного числа x:

$$|x| = \begin{cases} x, & \text{если} \quad x \geq 0, \\ -x, & \text{если} \quad x < 0. \end{cases}$$

Раскрытие модулей по определению

Приведём уже упоминавшиеся ранее эквивалентные переходы при раскрытии модулей по определению:

$$|f(x)| = g(x) \quad \Longleftrightarrow \quad \left[\begin{array}{l} \begin{cases} f(x) = g(x), \\ f(x) \geq 0; \end{cases} \\ \begin{cases} -f(x) = g(x), \\ f(x) < 0; \end{cases} \end{array}\right. \tag{47}$$

$$|f(x)| > g(x) \quad \Longleftrightarrow \quad \left[\begin{array}{l} \begin{cases} f(x) > g(x), \\ f(x) \geq 0; \end{cases} \\ \begin{cases} -f(x) > g(x), \\ f(x) < 0; \end{cases} \end{array}\right. \tag{48}$$

$$|f(x)| < g(x) \quad \Longleftrightarrow \quad \left[\begin{array}{l} \begin{cases} f(x) < g(x), \\ f(x) \geq 0; \end{cases} \\ \begin{cases} -f(x) < g(x), \\ f(x) < 0. \end{cases} \end{array}\right. \tag{49}$$

Заметим, что при подобном раскрытии модулей нам не приходится исследовать знак функции $g(x)$, стоящей в правой части неравенств:

- из равносильной совокупности (48) автоматически следует, что все значения x из области определения $f(x)$ и $g(x)$, при которых $g(x) < 0$, являются решением исходного неравенства;

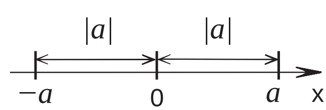
- из равносильной совокупности (49) при $g(x) < 0$ автоматически следует отсутствие решений у исходного неравенства.

В случае нестрогих неравенств с модулем неравенства равносильных систем также становятся нестрогими. Кроме того, нет принципиальной разницы в приписывании случая $f(x) = 0$ к любой из получаемых систем (или даже к обеим сразу).

Рассмотрим другой подход к раскрытию модулей, основанный на использовании геометрического смысла модуля.

Раскрытие модулей через геометрический смысл

Геометрическим смыслом модуля числа считается расстояние по числовой оси от начала отсчёта до рассматриваемого числа, причём одному и тому же значению $|a|$ соответствуют две симметричные относительно начала отсчёта точки: $-a$ и a.



Использование геометрического смысла модуля позволяет существенно сократить равносильные преобразования при раскрытии модулей. Например:

$$|f(x)| = g(x) \quad \Longleftrightarrow \quad \begin{cases} g(x) \geq 0, \\ \left[\begin{array}{l} f(x) = g(x), \\ f(x) = -g(x); \end{array}\right. \end{cases} \tag{50}$$

$$|f(x)| > g(x) \iff \left[\begin{array}{l} f(x) > g(x), \\ f(x) < -g(x); \end{array}\right. \tag{51}$$

$$|f(x)| < g(x) \iff -g(x) < f(x) < g(x). \tag{52}$$

Заметим, что при таком раскрытии модулей в неравенствах нам не приходится исследовать знак не только функции $g(x)$, стоящей в правой части неравенств, но и функции $f(x)$, стоящей под знаком модуля. Это сокращает работу при решении задач.

В случае нестрогих неравенств с модулем все неравенства равносильных систем также становятся нестрогими.

Дополнительные факты и сведения

В ряде случаев для упрощения решения бывает удобно использовать специальный вид уравнения или неравенства. Например:

$$|f(x)| = f(x) \iff f(x) \geq 0; \tag{53}$$

$$|f(x)| \leq f(x) \iff f(x) \geq 0; \tag{54}$$

$$|f(x)| + |g(x)| = f(x) + g(x) \iff \begin{cases} f(x) \geq 0, \\ g(x) \geq 0; \end{cases} \tag{55}$$

$$|f(x)| + |g(x)| \leq f(x) + g(x) \iff \begin{cases} f(x) \geq 0, \\ g(x) \geq 0. \end{cases} \tag{56}$$

Примеры решения задач

Пример 1. (Экон.К-78.1) Найти все решения уравнения $|x^2 + x - 1| = 2x - 1$, удовлетворяющие неравенству $x < \dfrac{\sqrt{3}}{3}$.

Решение. Раскроем модуль через геометрический смысл. Согласно (50) получаем:

$$|x^2+x-1| = 2x-1 \iff \begin{cases} 2x - 1 \geq 0, \\ \left[\begin{array}{l} x^2 + x - 1 = 2x - 1, \\ x^2 + x - 1 = -(2x - 1); \end{array}\right. \end{cases} \iff \begin{cases} x \geq \dfrac{1}{2}, \\ \left[\begin{array}{l} x^2 - x = 0, \\ x^2 + 3x - 2 = 0; \end{array}\right. \end{cases}$$

$$\iff \begin{cases} x \geq \dfrac{1}{2}, \\ \left[\begin{array}{l} x = 0 \quad \text{или} \quad x = 1, \\ x = \dfrac{-3 - \sqrt{17}}{2} \quad \text{или} \quad x = \dfrac{-3 + \sqrt{17}}{2}; \end{array}\right. \end{cases} \iff \left[\begin{array}{l} x = 1, \\ x = \dfrac{-3 + \sqrt{17}}{2}. \end{array}\right.$$

Корень $x=1$ не удовлетворяет неравенству $x<\dfrac{\sqrt{3}}{3}$. Проверим второй корень:

$$\begin{array}{rcl}
\dfrac{\sqrt{17}-3}{2} & \vee & \dfrac{1}{\sqrt{3}} \\
\sqrt{51}-3\sqrt{3} & \vee & 2 \\
\sqrt{51} & \vee & 3\sqrt{3}+2 \\
51 & \vee & 31+12\sqrt{3} \\
20 & \vee & 12\sqrt{3} \\
5 & \vee & 3\sqrt{3} \\
25 & < & 27
\end{array}$$

Значит, $\dfrac{\sqrt{17}-3}{2}<\dfrac{1}{\sqrt{3}}$, и $x=\dfrac{\sqrt{17}-3}{2}$ является решением задачи.

Ответ. $\dfrac{\sqrt{17}-3}{2}$.

Пример 2. (Биол-83.3) Решить неравенство $8+6\cdot|3-\sqrt{x+5}|>x$.

Решение. Раскроем модуль через геометрический смысл. Согласно (51) получаем:

$$\left[\begin{array}{l} 6(3-\sqrt{x+5})>x-8, \\ 6(3-\sqrt{x+5})<8-x; \end{array}\right. \iff \left[\begin{array}{l} 6\sqrt{x+5}<26-x, \\ 6\sqrt{x+5}>x+10. \end{array}\right.$$

Каждое из получившихся неравенств решаем по стандартному алгоритму для радикалов:

$$1)\quad 6\sqrt{x+5}<26-x \iff \begin{cases} 36(x+5)<(26-x)^2, \\ x\geq -5, \\ 26-x\geq 0; \end{cases} \iff \begin{cases} x^2-88x+496>0, \\ -5\leq x\leq 26; \end{cases}$$

$$\iff \begin{cases} x\in(-\infty;44-12\sqrt{10})\cup(44+12\sqrt{10};+\infty) \\ -5\leq x\leq 26; \end{cases} \iff -5\leq x<44-12\sqrt{10};$$

$$2)\quad 6\sqrt{x+5}>x+10 \iff \left[\begin{array}{l} \begin{cases} 36(x+5)>(x+10)^2, \\ x\geq -10, \end{cases} \\ \begin{cases} x+5\geq 0, \\ x<-10; \end{cases} \end{array}\right. \iff \left[\begin{array}{l} \begin{cases} x^2-16x-80<0, \\ x\geq -10, \end{cases} \\ \emptyset; \end{array}\right.$$

$$\iff \begin{cases} -4<x<20, \\ x\geq -10; \end{cases} \iff -4<x<20.$$

Объединяя результаты первого и второго случаев, получаем:

$$\left[\begin{array}{l} -5\leq x<44-12\sqrt{10}, \\ -4<x<20; \end{array}\right. \iff -5\leq x<20.$$

Ответ. $[-5;20)$.

П р и м е р 3. (ВМК-74.3) Найти все значения x, удовлетворяющие одновременно следующим условиям $\begin{cases} |x-2|+|x-3|=1, \\ 813x-974 \le 163x^2. \end{cases}$

Р е ш е н и е. Сначала рассмотрим уравнение

$$|x-2|+|x-3|=1 \iff |x-2|+|3-x|=(x-2)+(3-x) \iff$$

$$\iff \begin{cases} x-2 \ge 0, \\ 3-x \ge 0; \end{cases} \iff 2 \le x \le 3.$$

Теперь найдём корни квадратного трёхчлена $163x^2-813x+974$. Вычисление дискриминанта будет достаточно громоздким, поскольку все коэффициенты являются трёхзначными числами. Если же целочисленный корень ($x_1=2$) найти подбором, то второй корень можно получить с помощью теоремы Виета из соотношения $x_1 \cdot x_2 = \dfrac{974}{163}$. Непосредственное вычисление дискриминанта $D = 813^2-4\cdot 163\cdot 974 = 25921 = 161^2$ приводит к тем же значениям $x_1 = \dfrac{813-161}{2\cdot 163} = 2,\ x_2 = \dfrac{487}{163}$. В результате исходная система равносильна следующей:

$$\begin{cases} 2 \le x \le 3, \\ x \in (-\infty; 2] \cup \left[\dfrac{487}{163}; +\infty\right); \end{cases} \iff \left[\begin{array}{l} x=2, \\ \left[\dfrac{487}{163}; 3\right]. \end{array} \right.$$

О т в е т. $\{2\} \cup \left[\dfrac{487}{163}; 3\right]$.

Задачи

1. (Геол-91.2) Решить уравнение $|x^2-2x-1|-x+1=0$.
2. (Физ-98(2).2) Решить неравенство $|x^2+2x-8| > 2x$.
3. (Биол-98.2) Решить неравенство $|x^2+x-2|+|x+4| \le x^2+2x+6$.
4. (Физ-96(2).3) Решить неравенство $-1 < |x^2-9| < 27$.
5. (Экон-90.2) Решить уравнение $\sqrt{25+|16x^2-25|} = 4+4|x+1|$.
6. (Геогр-99(1).3) Решить уравнение $\sqrt{|x^2+14x+47|-1} = |x+7|-1$.
7. (ВМК-00(1).1) Решить неравенство $\left||x^2-8x+2|-x^2\right| \ge 2x+2$.
8. (М/м-00(1).1) Решить неравенство а) $\dfrac{|x-4|-|x-1|}{|x-3|-|x-2|} < \dfrac{|x-3|+|x-2|}{|x-4|}$;
   б) $\dfrac{|x-5|-|x+4|}{|x-2|-|x+1|} < \dfrac{|x-2|+|x+1|}{|x+4|}$.
9. (Почв-00.4) Решить систему уравнений $\begin{cases} |x-y|+2x=6, \\ |2x-y|+3x=6 \end{cases}$
   и изобразить множество решений на координатной плоскости (x, y).

10. (ИСАА-99.5) Решить неравенство $\dfrac{\sqrt{x^2-6}-3}{|x-1|-4} \geq 1$.

11. (ВМК-98(1).2) Решить неравенство
а) $|\sqrt{x-4}-3| > |\sqrt{9-x}-2|+1$; б) $|\sqrt{-2x-4}-3| < |\sqrt{9+2x}-2|+1$.

12. (Геогр-78.5) а) Найти все значения параметра a, для каждого из которых существует только одно значение x, удовлетворяющее системе уравнений
$\begin{cases} |x^2-5x+4|-9x^2-5x+4+10x|x|=0, \\ x^2-2(a-1)x+a(a-2)=0. \end{cases}$

б) Найти все значения параметра a, для каждого из которых существует ровно два значения x, удовлетворяющих системе уравнений
$\begin{cases} |x^2-7x+6|+x^2+5x+6-12x|x|=0, \\ x^2-2(a-2)x+a(a-4)=0. \end{cases}$

13. (Геол-86.5) а) Для каждой пары положительных чисел a и b найти решение неравенства $\sqrt{\dfrac{1}{x^2}-\dfrac{1}{a^2}} > \left|\dfrac{1}{x}-\dfrac{1}{b}\right|$.

б) Для каждой пары положительных чисел c и d найти решение неравенства $\sqrt{\dfrac{1}{x^2}-\dfrac{1}{c^2}} > \dfrac{1}{x}+\dfrac{1}{d}$.

14. (ВМК-95(1).4) Для каждого значения a решить неравенство
а) $|x+2a| \leq \dfrac{1}{x}$; б) $\left|\dfrac{1}{x}+2a\right| > x$.

10.2. Раскрытие модулей в тригонометрических уравнениях

В этом разделе собраны тригонометрические уравнения с модулями. Для успешного решения таких задач необходимо помнить и уметь применять тригонометрические формулы, приведённые в предыдущих разделах.

Примеры решения задач

П р и м е р 1. (Геогр-97(1).3) Решить уравнение $|\cos x|-\cos 3x = \sin 2x$. В ответе указать сумму корней уравнения, принадлежащих отрезку $[-8\pi; 7\pi]$.

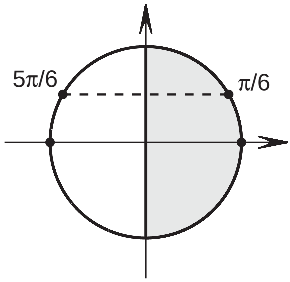
Р е ш е н и е. Раскроем модуль по определению.
1) При $\cos x \geq 0$ получим

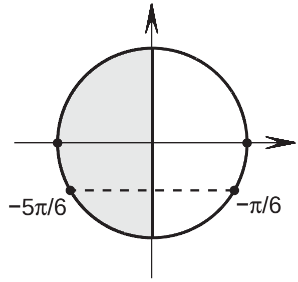
$$\cos x - \cos 3x = \sin 2x \iff 2\sin x \sin 2x = \sin 2x \iff$$

$$\iff \left[\begin{array}{l} \sin 2x = 0, \\ \sin x = \dfrac{1}{2}; \end{array}\right. \iff x \in \left\{\frac{\pi n}{2},\ \frac{\pi}{6}+2\pi m,\ \frac{5\pi}{6}+2\pi k;\quad n,m,k \in \mathbb{Z}\right\}.$$

Согласно условию $\cos x \geq 0$ оставляем углы I и IV четвертей:

$$x \in \left\{2\pi n,\ \frac{\pi}{2}+\pi m,\ \frac{\pi}{6}+2\pi k;\quad n,m,k \in \mathbb{Z}\right\}.$$





2) При $\cos x<0$ получим

$$-\cos x-\cos 3x=\sin 2x \iff \cos x(\sin x+\cos 2x)=0 \implies 2\sin^2 x-\sin x-1=0$$

$$\iff \left[\begin{array}{l}\sin x=1,\\ \sin x=-\dfrac{1}{2};\end{array}\right. \iff x\in\left\{\frac{\pi}{2}+2\pi n,\ -\frac{\pi}{6}+2\pi m,\ -\frac{5\pi}{6}+2\pi k;\quad n,m,k\in\mathbb{Z}\right\}.$$

Согласно условию $\cos x<0$, получим $x=-\dfrac{5\pi}{6}+2\pi n,\quad n\in\mathbb{Z}$.

Теперь найдём сумму корней, лежащих на отрезке $[-8\pi;7\pi]$.

1) $x=2\pi n\in[-8\pi;7\pi]$; тогда $n=-4,-3,\ldots,3$; $S_1=-8\pi-6\pi-...+6\pi=-8\pi$.

2) $x=\dfrac{\pi}{2}+\pi m\in[-8\pi;7\pi]$; тогда $-8\le m\le 6$; данную серию можно рассматривать как арифметическую прогрессию из 15 членов с разностью π и $a_1=\dfrac{\pi}{2}-8\pi$;

$$S_2=\frac{2a_1+14d}{2}\cdot 15=15(a_1+7d)=15\left(\frac{\pi}{2}-8\pi+7\pi\right)=-\frac{15\pi}{2}.$$

3) $x=\dfrac{\pi}{6}+\pi k\in[-8\pi;7\pi]$; тогда $-8\le k\le 6$; это арифметическая прогрессия из 15 членов с разностью π и $a_1=\dfrac{\pi}{6}-8\pi$;

$$S_3=\frac{2a_1+14d}{2}\cdot 15=15(a_1+7d)=15\left(\frac{\pi}{6}-8\pi+7\pi\right)=-\frac{25\pi}{2}.$$

В результате $S=S_1+S_2+S_3=-8\pi-\dfrac{15\pi}{2}-\dfrac{25\pi}{2}=-28\pi$.

Ответ. -28π.

Пример 2. (Биол-75.4) Решить уравнение

$$\sin x-2\sin 2x+\sin 3x=|1-2\cos x+\cos 2x|.$$

Решение. Преобразуем обе части уравнения:

$$\sin x+\sin 3x-2\sin 2x=|1+\cos 2x-2\cos x| \iff$$

$$\iff 2\sin 2x\cos x-2\sin 2x=|2\cos^2 x-2\cos x| \iff$$

$$\iff 2\sin 2x(\cos x-1)=|2\cos x(\cos x-1)| \iff$$

$$\iff 2\sin x\cos x(\cos x-1)=|\cos x|\cdot|\cos x-1|.$$

Рассмотрим два случая:
1) $\cos x = 1$ является решением, то есть $x = 2\pi k,\ k \in \mathbb{Z}$.
2) Если $\cos x \neq 1$, то уравнение можно поделить на $|1-\cos x| = 1-\cos x > 0$. Получим:

$$-2\sin x\cos x = |\cos x| \iff \left[\begin{array}{l} \cos x = 0, \\ \begin{cases} \cos x > 0, \\ \sin x = -\dfrac{1}{2}; \end{cases} \\ \begin{cases} \cos x < 0, \\ \sin x = \dfrac{1}{2}; \end{cases} \end{array}\right. \iff \left[\begin{array}{l} x = \dfrac{\pi}{2} + \pi n,\ n \in \mathbb{Z}, \\ x = -\dfrac{\pi}{6} + 2\pi m,\ m \in \mathbb{Z}, \\ x = \dfrac{5\pi}{6} + 2\pi q,\ q \in \mathbb{Z}. \end{array}\right.$$

Объединив найденные решения, получим ответ.

О т в е т. $\dfrac{\pi}{2} + \pi n,\ -\dfrac{\pi}{6} + \pi m,\ 2\pi k;\ n, m, k \in \mathbb{Z}$.

Задачи

1. (ЕГЭ) Решить уравнение $\cos^2 x + 0,5|\cos x| \cdot \sin x = 0$.
2. (Экон.К-77.1) Решить уравнение $\dfrac{\cos x}{\left(x+\frac{3}{2}\right)^2} = |\cos x|$.
3. (Почв-77.3) Решить уравнение $|\sin x| = \sin x + 2\cos x$.
4. (Почв-99(1).2) Решить уравнение $\left|\cos x - \dfrac{1}{2}\right| = \sin x - \dfrac{1}{2}$.
5. (Псих-89.2) Решить уравнение $\left|\cos^2 \dfrac{x}{2} - \dfrac{2}{5}\right| = 5\cos x + 1$.
6. (Почв-97.3) Решить уравнение $2\sin^2 x - \dfrac{|\sin x|}{\cos x} = 0$.
7. (Геол.ОГ-76.3) Найти все решения уравнения $\dfrac{|1-\cos x|}{1-\cos x}\sin x = 4\sin^2 x\cos x$.
8. (Биол-98.3) Решить уравнение $\sqrt{1-\cos 2x} = \sqrt{2}\sin x\left(\cos x - \dfrac{2}{3}\right)$.
9. (Почв-91.3) Решить уравнение $\sqrt{2}\cos\left(x + \dfrac{\pi}{4}\right) - \sin x = |\cos x|$.
10. (Экон-95.2) Решить уравнение $2|\sin x| + \sqrt{3}\log_{\operatorname{tg} x}\left(-\dfrac{\cos x}{|\sin x|}\right) = 0$.
11. (Экон-97.1) Решить систему уравнений

$$\begin{cases} \left|\sin\dfrac{\pi(x+y)}{4}\right| + \left|1 - \sin\dfrac{\pi(x-y)}{4}\right| = 0, \\ \sqrt{4-|x|-|y+2|} = \sqrt{4-|x|-|y+2|}. \end{cases}$$

12. (Геол-99.5) Решить уравнение

$$|\operatorname{ctg}^2 2x + 8\sqrt{-\operatorname{ctg} 2x} - 3| = |\operatorname{ctg}^2 2x - 8\sqrt{-\operatorname{ctg} 2x} - 3|.$$

13. (Хим-96.5) Решить уравнение

$$|1 + \cos \pi\sqrt{x}| + |x^2 - 15x + 44| = 15x - x^2 - \cos \pi\sqrt{x} - 45.$$

14. (ВМК-81.5) Найти все решения уравнения $|\sin(2x-1)| = \cos x$, удовлетворяющие условию $|x| \le 2\pi$.

10.3. Раскрытие модулей в показательных и логарифмических уравнениях и неравенствах

В этом разделе собраны задачи с модулями, содержащие показательные и логарифмические функции.

Для успешного решения таких задач необходимо помнить и уметь применять соответствующие формулы, приведённые в предыдущих разделах.

Примеры решения задач

Пример 1. (Экон-91.2) Решить неравенство $\log_{\frac{1}{7}} \log_3 \dfrac{|-x+1| + |x+1|}{2x+1} \ge 0$.

Решение. Поочерёдно снимаем логарифмы, используя монотонность логарифмической функции, не забывая при этом про ОДЗ:

$$0 < \log_3 \frac{|x-1| + |x+1|}{2x+1} \le 1 \quad\Longleftrightarrow\quad 1 < \frac{|x-1| + |x+1|}{2x+1} \le 3.$$

Так как числитель дроби положителен всегда, то неравенство имеет смысл только при положительном знаменателе, то есть при $x > -\dfrac{1}{2}$, что позволяет уйти от дроби и снять второй модуль в числителе:

$$2x + 1 < |x-1| + x + 1 \le 6x + 3 \quad\Longleftrightarrow\quad \begin{cases} |x-1| > x, \\ |x-1| \le 5x + 2; \end{cases}$$

раскрываем модули в неравенстве через геометрический смысл:

$$\begin{cases} \left[\begin{array}{l} x - 1 < -x, \\ x - 1 > x; \end{array}\right. \\ \begin{cases} x - 1 \ge -5x - 2, \\ x - 1 \le 5x + 2; \end{cases} \end{cases} \quad\Longleftrightarrow\quad \begin{cases} x < \dfrac{1}{2}, \\ x \ge -\dfrac{1}{6}, \\ x \ge -\dfrac{3}{4}; \end{cases} \quad\Longleftrightarrow\quad -\frac{1}{6} \le x < \frac{1}{2}.$$

Все найденные решения удовлетворяют условию $x > -\dfrac{1}{2}$.

Ответ. $\left[-\dfrac{1}{6}; \dfrac{1}{2}\right)$.

П р и м е р 2. (ВМК-88.4) Решить неравенство $8^x \geq 6 \cdot 9^{|x-1|}$.

Р е ш е н и е. Раскрывая модуль по определению, получаем два случая.

1) Если $x \geq 1$, то $8^x \geq 6 \cdot 9^{x-1} \iff \left(\frac{9}{8}\right)^x \leq \frac{3}{2} \iff x \leq \log_{\frac{9}{8}} \frac{3}{2}$.

2) Если $x < 1$, то $8^x \geq 6 \cdot 9^{1-x} \iff 72^x \geq 54 \iff x \geq \log_{72} 54$.

В итоге $x \in [\log_{72} 54; 1) \cup \left[1; \log_{\frac{9}{8}} \frac{3}{2}\right] \iff x \in \left[\log_{72} 54; \log_{\frac{9}{8}} \frac{3}{2}\right]$.

О т в е т. $\left[\log_{72} 54; \log_{\frac{9}{8}} \frac{3}{2}\right]$.

Задачи

1. (Экон.К-86.1) Решить уравнение $2^{|x+1|} = \left(\sqrt{2}\right)^{-2x+3}$.
2. (М/м-98(1).1) Решить уравнение $2^{2x} - 2^{x+2} + \left|2^x - \frac{1}{3}\right| = -\frac{7}{3}$.
3. (М/м-93(1).1) Решить неравенство $5\left(\sqrt[6]{\frac{1}{5}}\right)^{35x} < 5^{|x^2+6x-1|}$.
4. (М/м-97(2).1) Решить неравенство $\dfrac{21 - 2^x - 2^{6-x} - |3 - 2^x|}{5 - |3 - 2^x|} \geq 1$.
5. (Почв-84.3) Решить неравенство $\log_2 \left|1 + \frac{1}{x}\right| > 1$.
6. (Физ-95(2).5) Решить неравенство $|\log_7 (x + 2)| > 1$.
7. (Экон.К-85.2) Решить неравенство $x \log_{\frac{1}{2}} \left(\frac{1}{3} - x\right) \geq |x|$.
8. (Геол-92.3) Решить уравнение $|3 \log_x x^4 + 7 \log_7 2 \cdot \log_2 x^2| = -\log_x 49$.
9. (Экон.М-99.1) Решить неравенство $\log_{1+|7x+17|}(|3x + 8| + |7x + 17|) \leq 1$.
10. (ВМК-70.2) Решить уравнение $|1 - \log_{\frac{1}{6}} x| + 2 = |3 - \log_{\frac{1}{6}} x|$.
11. (ВМК-93.3) Решить неравенство $|3^x - 4| + |x^2 - 4x + 3| \leq 3^x + 4x - x^2 - 7$.
12. (Экон-83.3) Решить неравенство $\log_3(x^2 - 2) < \log_3 \left(\frac{3}{2}|x| - 1\right)$.
13. (Геол-99(1).5) Решить неравенство $2 < \left|2 \log_{\frac{1}{2}} (3x + 1) - 4\right| \leq 3$.
14. (Соц-97.5) Решить систему $\begin{cases} \dfrac{1}{\sqrt[3]{32}} \cdot 8^{3x^2} > 2^{x+3}, \\ \left|x\sqrt{2} - 1\right| = \sqrt{2}x - 1. \end{cases}$
15. (М/м-90.2) Решить уравнение $3 \cdot 2^{\cos x + 3\sqrt{1 - \sin^2 x}} + 11 \cdot 2^{2\cos x} - 34 = 0$.

11. Разложение на множители и расщепление в уравнениях и неравенствах различных видов

11.1. Понятие расщепления, равносильные преобразования

Теоретический материал

В этом разделе собраны задачи, для решения которых необходимо иметь навыки разложения на множители алгебраических выражений. После разложения на множители получающиеся уравнения и неравенства решаются расщеплением.

Основная идея расщепления при решении уравнений $f(x)\cdot g(x)=0$ достаточно проста и основана на том, что произведение равно нулю тогда и только тогда, когда хотя бы один из сомножителей равен нулю, а другой при этом *имеет смысл*, то есть

$$f(x)\cdot g(x)=0 \quad\Longleftrightarrow\quad \left[\begin{array}{l} \left\{\begin{array}{l} f(x)=0, \\ g(x) - \text{определена}; \end{array}\right. \\ \left\{\begin{array}{l} g(x)=0, \\ f(x) - \text{определена}. \end{array}\right. \end{array}\right.$$

Неравенство $f(x)\cdot g(x)<0$ справедливо тогда и только тогда, когда множители имеют разные знаки, то есть

$$f(x)\cdot g(x)<0 \quad\Longleftrightarrow\quad \left[\begin{array}{l} \left\{\begin{array}{l} f(x)>0, \\ g(x)<0; \end{array}\right. \\ \left\{\begin{array}{l} f(x)<0, \\ g(x)>0. \end{array}\right. \end{array}\right.$$

Неравенство $f(x)\cdot g(x)>0$ справедливо тогда и только тогда, когда множители имеют одинаковые знаки, то есть

$$f(x)\cdot g(x)>0 \quad\Longleftrightarrow\quad \left[\begin{array}{l} \left\{\begin{array}{l} f(x)>0, \\ g(x)>0; \end{array}\right. \\ \left\{\begin{array}{l} f(x)<0, \\ g(x)<0. \end{array}\right. \end{array}\right.$$

При решении нестрогих неравенств можно воспользоваться аналогичной совокупностью с нестрогими неравенствами, например,

$$f(x)\cdot g(x)\le 0 \quad\Longleftrightarrow\quad \left[\begin{array}{l} \left\{\begin{array}{l} f(x)\ge 0, \\ g(x)\le 0; \end{array}\right. \\ \left\{\begin{array}{l} f(x)\le 0, \\ g(x)\ge 0; \end{array}\right. \end{array}\right.$$

но иногда удобнее расщепить нестрогое неравенство на равенство и строгое неравенство

$$f(x)\cdot g(x)\ge 0 \quad\Longleftrightarrow\quad \left[\begin{array}{l} f(x)\cdot g(x)>0, \\ f(x)\cdot g(x)=0. \end{array}\right.$$

Теперь рассмотрим более общий случай. Пусть уравнение или неравенство приведено к виду, когда в правой части стоит нуль, а в левой – произведение сомножителей $F_1(x)\cdot F_2(x)\cdot\ldots\cdot F_n(x)$, зависящих от аргумента таким образом, что решение уравнения $F_k(x)=0$ или неравенства $F_k(x)>0$ при $\forall k=1,2,...,n$ трудностей не представляет.

Правило расщепления уравнений: произведение равно нулю в тех и только тех случаях, когда хотя бы один из его сомножителей равен нулю, а все остальные имеют при этом смысл.

Правило расщепления неравенств: произведение отрицательно в тех и только тех случаях, когда нечётное число его сомножителей отрицательны, а остальные положительны; произведение положительно в тех и только тех случаях, когда чётное число его сомножителей отрицательны, а остальные положительны (при этом нуль может считаться чётным числом).

Замечание. Случай, когда множителей больше, чем два, можно свести к случаю с двумя множителями, последовательно производя расщепление.

Примеры решения задач

Пример 1. (Псих-81.1) Решить систему уравнений $\begin{cases} x-y+\sqrt{x^2-4y^2}=2, \\ x^5\cdot\sqrt{x^2-4y^2}=0. \end{cases}$

Решение. Рассмотрим второе уравнение системы

$$x^5\cdot\sqrt{x^2-4y^2}=0.$$

Возможны два варианта: либо $x=0$ и при этом $x^2-4y^2\geq 0$, либо $x^2-4y^2=0$.

В первом случае получаем систему

$$\begin{cases} x=0, \\ x^2-4y^2\geq 0, \\ x-y+\sqrt{x^2-4y^2}=2; \end{cases} \iff \begin{cases} x=0, \\ -4y^2\geq 0, \\ -y+\sqrt{-4y^2}=2; \end{cases} \iff \begin{cases} x=0, \\ y=0, \\ 0=2; \end{cases}$$

то есть система не имеет решений.

Во втором случае получаем систему

$$\begin{cases} x^2-4y^2=0, \\ x-y+\sqrt{x^2-4y^2}=2; \end{cases} \iff \begin{cases} |x|=2|y|, \\ x-y=2; \end{cases} \iff \begin{cases} x=\pm 2y, \\ x=y+2; \end{cases}$$

откуда и получаем ответ.

Ответ. $\left(\dfrac{4}{3};-\dfrac{2}{3}\right)$, $(4;2)$.

Пример 2. (Геол-94(1).6) Решить неравенство $|x|\cdot(x^4-2x^2-3)\geq 0$.

Решение. Исходное неравенство равносильно совокупности уравнения

$$|x|\cdot(x^4-2x^2-3)=0 \qquad (*)$$

и неравенства

$$|x|\cdot(x^4-2x^2-3)>0. \qquad (**)$$

1) Решим уравнение (*) расщеплением. Один из корней уравнения $x_1 = 0$, другие являются корнями биквадратного уравнения $x^4 - 2x^2 - 3 = 0$, решая которое, получим $x_2 = \sqrt{3}$, $x_3 = -\sqrt{3}$.

2) В силу неотрицательности модуля неравенство (**) при $x \neq 0$ равносильно неравенству

$$x^4 - 2x^2 - 3 > 0 \iff (x^2+1)(x^2-3) > 0 \iff (x-\sqrt{3})(x+\sqrt{3}) > 0 \iff$$

$$\iff x \in \left(-\infty; -\sqrt{3}\right) \cup \left(\sqrt{3}; +\infty\right).$$

Объединяя найденные решения, получаем ответ.

Ответ. $\left(-\infty; -\sqrt{3}\right] \cup \{0\} \cup \left[\sqrt{3}; +\infty\right)$.

Задачи

1. (ЕГЭ) Найти сумму корней уравнения $(x+1)\cdot\sqrt{2x^2+5x+2} = 0$.
2. (ЕГЭ) Найти произведение корней уравнения $(2x-3)\cdot\sqrt[3]{2x^2-5x+2} = 0$.
3. (Экон-86.3) Решить уравнение $\sqrt{3x+4}\cdot(9x^2+21x+10) = 0$.
4. (ВМК-78.1) Решить неравенство $(x-1)\cdot\sqrt{x^2-x-2} \geq 0$.
5. (Геол-88.2) Решить неравенство $(x^2+8x+15)\cdot\sqrt{x+4} \geq 0$.
6. (Экон.К-86.3) Решить неравенство $(8x^2-6x+1)\cdot\sqrt{-25x^2+15x-2} \geq 0$.
7. (М/м-83.1) Решить неравенство $\dfrac{\sqrt{6+x-x^2}}{2x+5} \geq \dfrac{\sqrt{6+x-x^2}}{x+4}$.
8. (М/м-95(1).2) Решить уравнение $\dfrac{|x^3|-|5x|}{\sqrt{2x^2-4x-1}-|x|+2} = 0$.
9. (ЕГЭ) При каких значениях параметра a уравнение $(x^2+4x+3)\sqrt{x-a} = 0$ имеет ровно два решения?
10. (Псих-98.3) Решить неравенство $\dfrac{\sqrt{4x+7}-3x+5}{16-3x^2+22x} \leq 0$.
11. (Геол-95.3) Решить систему $\begin{cases} x^3\cdot\sqrt{x-y} = 0, \\ 2y^2+y = 21+2xy. \end{cases}$
12. (Псих-90.3) Решить неравенство $\left(-\dfrac{x}{2}+\dfrac{5}{8}-\dfrac{15}{88-32x}\right)^2 \leq 1$.
13. (Геол-99(1).7) Решить неравенство $\sqrt{4x-x^2-3} \geq \sqrt{x^2-7x+12} - \sqrt{x^2-5x+6}$.
14. (М/м-73.3) Решить неравенство $4x + 8\sqrt{2-x^2} > 4 + (x^2-x)\cdot 2^x + 2^{x+1}\cdot x\sqrt{2-x^2}$.

15. (Геогр-96(1).4) Решить неравенство
$$\frac{\left(3x-2\arccos\left(-\frac{1}{2}\right)\right)\left(x-\log_{\sqrt{3}}2\sqrt{7}\right)^2}{x-8\sin\dfrac{241\pi}{12}}\le 0\,.$$

11.2. Расщепление в тригонометрических уравнениях и неравенствах

В этом разделе собраны тригонометрические уравнения и неравенства, которые решаются с помощью разложения на множители и расщепления.

Для успешного решения таких задач необходимо помнить тригонометрические формулы из предыдущих разделов.

Примеры решения задач

Пример 1. (Биол-83.1) Решить уравнение $4\cos^3 x+3\sqrt{2}\sin 2x=8\cos x$.

Решение. Распишем синус двойного угла и вынесем общий множитель:
$$4\cos^3 x+6\sqrt{2}\sin x\cos x=8\cos x \quad\Longleftrightarrow\quad \cos x\cdot(4\cos^2 x+6\sqrt{2}\sin x-8)=0.$$

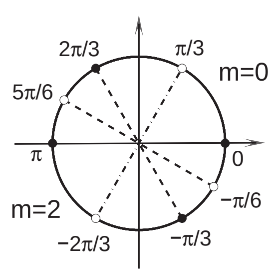
Либо $\cos x=0$ и $x=\pi/2+\pi n,\ n\in\mathbb{Z}$, либо $4\cos^2 x+6\sqrt{2}\sin x-8=0$. Используя основное тригонометрическое тождество, получим квадратное уравнение
$$2\sin^2 x-3\sqrt{2}\sin x+2=0 \quad\Longleftrightarrow\quad \sin x=\frac{3\sqrt{2}\pm\sqrt{2}}{4} \quad\Longleftrightarrow\quad \left[\begin{array}{l}\sin x=\sqrt{2};\\ \sin x=\dfrac{\sqrt{2}}{2}.\end{array}\right.$$

В первом случае решений нет, так как $\sqrt{2}>1$; во втором случае $x=(-1)^k\dfrac{\pi}{4}+\pi k, k\in\mathbb{Z}$.

Ответ. $\dfrac{\pi}{2}+\pi n,\ (-1)^k\dfrac{\pi}{4}+\pi k;\ n,k\in\mathbb{Z}$.

Пример 2. (М/м-95.3) Решить уравнение $\sqrt{\sin 3x}\cdot\operatorname{tg}\left(2x-\dfrac{\pi}{6}\right)=0$.

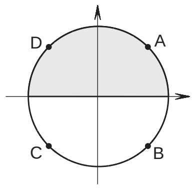
Решение. Первый случай:
$$\begin{cases}\sin 3x=0,\\ \cos\left(2x-\dfrac{\pi}{6}\right)\ne 0;\end{cases} \quad\Longleftrightarrow\quad \begin{cases}x=\dfrac{\pi n}{3},\ n\in\mathbb{Z},\\ x\ne\dfrac{\pi}{3}+\dfrac{\pi m}{2},\ m\in\mathbb{Z};\end{cases}$$



отметив соответствующие значения на тригонометрической окружности с учётом выколотых точек, получаем $x=\pi n$ или $x=-\dfrac{\pi}{3}+\pi m;\ n,m\in\mathbb{Z}$.

Второй случай:
$$\begin{cases}\operatorname{tg}\left(2x-\dfrac{\pi}{6}\right)=0,\\ \sin 3x\ge 0;\end{cases} \quad\Longleftrightarrow\quad \begin{cases}x=\dfrac{\pi}{12}+\dfrac{\pi n}{2},\ n\in\mathbb{Z},\\ \sin 3x\ge 0;\end{cases} \quad\Longleftrightarrow\quad \begin{cases}3x=\dfrac{\pi}{4}+\dfrac{3\pi n}{2},\ n\in\mathbb{Z},\\ \sin 3x\ge 0.\end{cases}$$

Рассмотрим тригонометрическую окружность с аргументом $3x$. Каждое из значений серии $3x = \dfrac{\pi}{4} + \dfrac{3\pi n}{2}$, $n \in \mathbb{Z}$ попадает в одну из четырёх точек $A(n = 0, 4, 8...)$, $B(n = 1, 5, 9...)$, $C(n = 2, 6, 10...)$, $D(n = 3, 7, 11...)$ этой окружности.



Так как синус положителен только в первой и второй четвертях, то нам подходят только A и D. В результате получаем

$$\begin{cases} x = \dfrac{\pi}{12} + \dfrac{\pi n}{2},\ n \in \mathbb{Z}, \\ \left[\begin{array}{l} n = 4l,\ l \in \mathbb{Z}; \\ n = 3 + 4k,\ k \in \mathbb{Z}; \end{array}\right. \end{cases} \iff \begin{cases} x = \dfrac{\pi}{12} + 2\pi l,\ l \in \mathbb{Z}, \\ x = \dfrac{19\pi}{12} + 2\pi k,\ k \in \mathbb{Z}. \end{cases}$$

О т в е т. πn, $-\dfrac{\pi}{3} + \pi m$, $\dfrac{19\pi}{12} + 2\pi k$, $\dfrac{\pi}{12} + 2\pi l$; $\quad n, m, k, l \in \mathbb{Z}$.

П р и м е р 3. (М/м-93(2).3) Решить систему уравнений

$$\begin{cases} (\cos y + \sin x - 1) \cdot \left(\operatorname{tg}^2\left(x - \dfrac{\pi}{3}\right) + \operatorname{tg}^2\left(y + \dfrac{\pi}{6}\right)\right) = 0, \\ (\sin x - \cos y) \cdot (2 - \sin 2y + \sin y) = 0. \end{cases}$$

Р е ш е н и е. Область определения:

$$\begin{cases} \cos\left(x - \dfrac{\pi}{3}\right) \neq 0, \\ \cos\left(y + \dfrac{\pi}{6}\right) \neq 0; \end{cases} \iff \begin{cases} x \neq -\dfrac{\pi}{6} + \pi k,\ k \in \mathbb{Z}, \\ y \neq \dfrac{\pi}{3} + \pi l,\ l \in \mathbb{Z}. \end{cases}$$

Исходная система равносильна следующей системе совокупностей:

$$\begin{cases} \left[\begin{array}{l} \sin x + \cos y = 1; \\ \sin\left(x - \dfrac{\pi}{3}\right) = \sin\left(y + \dfrac{\pi}{6}\right) = 0; \end{array}\right. \\ \left[\begin{array}{l} \sin x = \cos y; \\ \sin y + 2 = \sin 2y. \end{array}\right. \end{cases}$$

Рассмотрим отдельно последнее уравнение

$$\sin y + 2 = \sin 2y \iff \begin{cases} \sin 2y = 1, \\ \sin y = -1; \end{cases} \iff \begin{cases} \cos y = -\dfrac{1}{2}, \\ \sin y = -1; \end{cases}$$

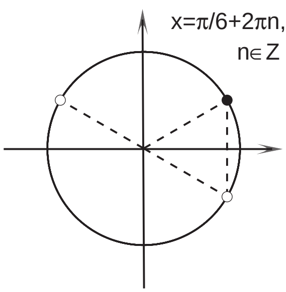
решений нет. Следовательно, исходная система равносильна системе

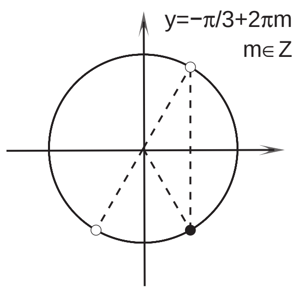
$$\begin{cases} \left[\begin{array}{l} \sin x + \cos y = 1; \\ \sin\left(x - \dfrac{\pi}{3}\right) = \sin\left(y + \dfrac{\pi}{6}\right) = 0; \end{array}\right. \\ \sin x = \cos y; \end{cases} \iff \left[\begin{array}{l} \begin{cases} \sin x + \cos y = 1, \\ \sin x = \cos y; \end{cases} \\ \begin{cases} \sin\left(x - \dfrac{\pi}{3}\right) = \sin\left(y + \dfrac{\pi}{6}\right) = 0, \\ \sin x = \cos y. \end{cases} \end{array}\right.$$

Из первой системы следует, что $\sin x = \cos y = \dfrac{1}{2}$, то есть

$$x = (-1)^n \frac{\pi}{6} + \pi n, \quad y = \pm\frac{\pi}{3} + 2\pi m;\ n, m \in \mathbb{Z};$$

откуда с учётом области определения получаем $x = \dfrac{\pi}{6} + 2\pi n$, $y = -\dfrac{\pi}{3} + 2\pi m$; $n, m \in \mathbb{Z}$.





Из второй системы следует, что

$$\begin{cases} x = \dfrac{\pi}{3} + \pi n,\ y = -\dfrac{\pi}{6} + \pi m, \\ \sin x = \cos y. \end{cases}$$

Подставим значения x и y во второе уравнение и преобразуем его:

$$\sin\left(\frac{\pi}{3} + \pi n\right) = \cos\left(-\frac{\pi}{6} + \pi m\right) \iff \sin\left(\frac{\pi}{3} + \pi n\right) = \cos\left(\frac{\pi}{6} - \pi m\right) \iff$$

$$\iff \sin\left(\frac{\pi}{3} + \pi n\right) = \sin\left(\frac{\pi}{2} - (\frac{\pi}{6} - \pi m)\right) \iff \sin\left(\frac{\pi}{3} + \pi n\right) = \sin\left(\frac{\pi}{3} + \pi m\right).$$

Значит, числа $n, m \in \mathbb{Z}$ должны быть одинаковой чётности, то есть $m - n = 2k$, $k \in \mathbb{Z}$; следовательно, $x = \dfrac{\pi}{3} + \pi n$, $y = -\dfrac{\pi}{6} + \pi(n + 2k)$ – решение исходной системы.

О т в е т. $\left(\dfrac{\pi}{6} + 2\pi n; -\dfrac{\pi}{3} + 2\pi m\right)$, $\left(\dfrac{\pi}{3} + \pi l; -\dfrac{\pi}{6} + \pi(l + 2k)\right)$; $n, m, k, l \in \mathbb{Z}$.

Задачи

1. (Псих-84.3) Решить уравнение $2(\cos x - 1)\sin 2x = 3\sin x$.

2. (Почв-94.1) Решить уравнение $\sin^3 x - \sin^2 x = \sin^2 x \cos^2 x$.

3. (ИСАА-98.1) Решить уравнение $\sin^2 x + \sin^2 6x = 1$.

4. (Псих-91.2) Решить уравнение $(\cos x - 1)\left(\sin x - \dfrac{1}{2}\cos 2x - 1\right) = \sin^2 x$.

5. (Фил-78.3) Решить уравнение $5\sin x + 6\sin 2x + 5\sin 3x + \sin 4x = 0$.

6. (Биол-89.3) Решить уравнение
$$\sin x(3\sin 2x \sin^3 x + 12\sin 2x \sin x - 16\cos x) + 2\sin 4x = 0.$$

7. (ЕГЭ.С) Найти сумму корней уравнения $\sin 2x \cdot (\operatorname{tg} x - 1) = 0$, принадлежащих промежутку $[0; 2\pi]$. Ответ записать в градусах.

8. (Почв-96(1).5) Решить уравнение $(1 - \cos 8x)\operatorname{tg} x = 6\sin^2 4x \cdot \operatorname{ctg} x$.

9. (М/м-97.1) Решить уравнение $(2\sin^2 x - 3\sin x + 1)\sqrt{\operatorname{tg} x} = 0$.

10. (М/м-97.1) Решить уравнение $(2\cos^2 x - \cos x - 1)\sqrt{\operatorname{ctg} x} = 0$.

11. (Экон.К-87.1) Решить уравнение $(2\sin x - 1)\sqrt{\cos\left(x + \dfrac{\pi}{4}\right)} = 0$.

12. (М/м-81.2) Решить систему $\begin{cases} \sqrt{\sin x} \cdot \cos y = 0, \\ 2\sin^2 x - \cos 2y - 2 = 0. \end{cases}$

13. (ВМК-78.2) Решить уравнение $(1 + \operatorname{tg}^2 2x)\left(\sin\dfrac{21x}{4}\cos\dfrac{7x}{4} + \sin\dfrac{5x}{4}\cos\dfrac{x}{4}\right) = \dfrac{1}{\cos^2 2x}\left(\sin\dfrac{x}{4}\cos\dfrac{5x}{4} - \sin\dfrac{7x}{4}\cos\dfrac{21x}{4}\right)$.

14. (Филол-70.2) Найти все x, удовлетворяющие условию $\dfrac{\pi}{2} < \left|3x - \dfrac{\pi}{2}\right| \leq \pi$ и являющиеся решением уравнения $1 + \cos x + \cos 2x = \sin x + \sin 2x + \sin 3x$.

15. (ВМК-98(1).3) Решить уравнение $\operatorname{tg} x \cdot \sqrt{\sin x - 2\cos x - 1} = 0$.

16. (Псих-98.4) Решить уравнение $\operatorname{tg} 8x - \operatorname{tg} 6x = \dfrac{1}{\sin 4x}$ при $x \in \left[-\dfrac{\pi}{4}; \dfrac{3\pi}{4}\right]$.

17. (М/м-00(1).3) Найти все корни уравнения
$$\cos x \sin\frac{x}{4} + \frac{9}{10}\sin x + 2\sin\frac{x}{4}\cos\frac{x}{2} + \sin\frac{x}{4} - \frac{1}{2}\cos\frac{x}{4} - \frac{9}{20} = 0,$$
принадлежащие отрезку $\left[-\dfrac{9\pi}{2}; -\dfrac{3\pi}{2}\right]$.

11.3. Расщепление в показательных и логарифмических уравнениях и неравенствах, модифицированный метод интервалов

Теоретический материал

В этом разделе собраны показательные и логарифмические уравнения и неравенства, которые решаются с помощью разложения на множители и расщепления.

Однородные выражения второй степени

Однородное уравнение второй степени можно свести к квадратному уравнению делением обеих частей, например, на $(g(x))^2$:

$$Af^2(x) + Bf(x)g(x) + Cg^2(x) = 0, \quad A, C \neq 0 \quad \Longleftrightarrow$$

$$\Longleftrightarrow \quad \left[\begin{array}{l} \left\{ \begin{array}{l} f(x) = 0, \\ g(x) = 0; \end{array} \right. \\ A \cdot \left(\dfrac{f(x)}{g(x)} \right)^2 + B \cdot \dfrac{f(x)}{g(x)} + C = 0. \end{array} \right.$$

В случае, когда функции $f(x)$ и $g(x)$ не имеют общих нулей (например, $f(x) = \sin x$, $g(x) = \cos x$; $f(x)$, $g(x)$ – показательные функции), от выписанной совокупности остаётся только квадратное уравнение.

С другой стороны, если сразу рассмотреть $S(x)$ как квадратный трёхчлен относительно $f(x)$ с коэффициентами A, $Bg(x)$, $Cg^2(x)$, то деления не потребуется.

В случае, когда нам надо разложить на множители выражение вида

$$S(x) = Af^2(x) + Bf(x)g(x) + Cg^2(x), \quad A, C \neq 0,$$

можно также рассмотреть его как квадратный трёхчлен относительно $f(x)$ с коэффициентами A, $Bg(x)$, $Cg^2(x)$ и воспользоваться разложением на множители квадратного трёхчлена. Напомним, что $ax^2 + bx + c = a(x - x_1)(x - x_2)$, где x_1 и x_2 – корни квадратного трёхчлена.

Модифицированный метод интервалов

При решении различных неравенств нередко бывает удобно заменить некоторые функции (показательные, логарифмические и др.) более простыми, но того же знака, быть может, с дополнительными условиями эквивалентности. Целью такой замены является приведение неравенства произвольного вида к рациональному, которое решается обычным методом интервалов.

На практике для реализации такого *модифицированного метода интервалов* наиболее часто используются следующие утверждения, истинность которых легко доказать, используя домножение неравенства на выражение, сопряжённое левой части неравенства (первые два утверждения), или используя монотонность показательной и логарифмической функций (третье и четвёртое):

- $|f(x)| - |g(x)| \ \vee \ 0 \quad \Longleftrightarrow \quad f^2(x) - g^2(x) \ \vee \ 0;$
- $\sqrt[2k]{f(x)} - g(x) \ \vee \ 0 \quad \Longleftrightarrow \quad f(x) - g^{2k}(x) \ \vee \ 0$
  при $f(x) \geq 0$, $g(x) \geq 0$;

- $a(x)^{f(x)} - a(x)^{g(x)} \ \vee\ 0 \quad \Longleftrightarrow \quad (a(x)-1)\,(f(x)-g(x)) \ \vee\ 0$
  при $a(x) > 0$;

- $\log_{a(x)} f(x) - \log_{a(x)} g(x) \ \vee\ 0 \quad \Longleftrightarrow \quad (a(x)-1)\,(f(x)-g(x)) \ \vee\ 0$
  при $f(x) > 0,\ \ g(x) > 0,\ \ a(x) > 0,\ a(x) \neq 1$;

то есть в произведениях $F_1(x)F_2(x)...F_n(x) \ \vee\ 0$ множители указанного вида можно с необходимыми условиями эквивалентности переходов (чаще всего сводящимися просто к условиям существования конкретных выражений) заменять более простыми того же знака.

Из двух последних утверждений можно получить следующие видоизменения:

- $a(x)^{f(x)} - b(x) \ \vee\ 0 \quad \Longleftrightarrow \quad (a(x)-1)\left(f(x) - \log_{a(x)} b(x)\right) \ \vee\ 0$
  при $b(x) > 0$, $0 < a(x) \neq 1$ $\left(b(x) = a(x)^{\log_{a(x)} b(x)}\right.$ по основному логарифмическому тождеству);

- $\log_{a(x)} f(x) - b(x) \ \vee\ 0 \quad \Longleftrightarrow \quad (a(x)-1)\left(f(x) - a(x)^{b(x)}\right) \ \vee\ 0$
  при $f(x) > 0,\ \ a(x) > 0,\ a(x) \neq 1$;

если в некоторых случаях вычитаемое является константой (и, в частности, нулём), то утверждения существенно упрощаются, но сохраняют свой вид, например:

$$\log_{a(x)} f(x) \ \vee\ 0 \quad \Longleftrightarrow \quad (a(x)-1)\,(f(x)-1) \vee 0$$

при $f(x) > 0,\ \ a(x) > 0,\ a(x) \neq 1$.

Примеры решения задач

Пример 1. (Почв-88.3) Решить уравнение $3 \cdot 4^x - 7 \cdot 10^x + 2 \cdot 25^x = 0$.

Решение. Разделим обе части уравнения $3 \cdot 2^{2x} - 7 \cdot 2^x \cdot 5^x + 2 \cdot 5^{2x} = 0$ на 2^{2x} и положим $z = \left(\dfrac{5}{2}\right)^x > 0$, тогда $2z^2 - 7z + 3 = 0$; $z = \dfrac{1}{2}$ или $z = 3$, следовательно, $\left(\dfrac{5}{2}\right)^x = 3$ или $\left(\dfrac{5}{2}\right)^x = \dfrac{1}{2}$, откуда $x = \log_{\frac{5}{2}} 3$ или $x = \log_{\frac{5}{2}} \dfrac{1}{2} = -\log_{\frac{5}{2}} 2$.

Ответ. $-\log_{\frac{5}{2}} 2$; $\log_{\frac{5}{2}} 3$.

Пример 2. (Физ-93.1) Решить неравенство $\dfrac{2x-1}{2^x-1} < 0$.

Решение. Применим модифицированный метод интервалов, то есть заменим в исходном неравенстве $2^x - 1 = 2^x - 2^0$ на $(2-1)(x-0) = x$:

$$\frac{2x-1}{2^x-1} < 0 \quad \Longleftrightarrow \quad \frac{2x-1}{x} < 0 \quad \Longleftrightarrow \quad 0 < x < \frac{1}{2}.$$

Ответ. $\left(0; \dfrac{1}{2}\right)$.

П р и м е р 3. (М/м-94(2).3) Решить неравенство
$\log_{2-5x} 3 + \dfrac{1}{\log_2(2-5x)} \le \dfrac{1}{\log_6(6x^2-6x+1)}$.

Р е ш е н и е. Преобразуем левую часть неравенства:

$$\log_{2-5x} 3 + \log_{2-5x} 2 \le \frac{1}{\log_6\,(6x^2-6x+1)} \quad\Longleftrightarrow$$

$$\Longleftrightarrow \quad \log_{2-5x} 6 \le \frac{1}{\log_6\,(6x^2-6x+1)} \quad\Longleftrightarrow\quad \frac{1}{\log_6(2-5x)} \le \frac{1}{\log_6(6x^2-6x+1)};$$

приведём к общему знаменателю:

$$\frac{\log_6(6x^2-6x+1) - \log_6(2-5x)}{\log_6(2-5x)\log_6(6x^2-6x+1)} \le 0.$$

Выражение $\log_a f(x)$ при $a>1$ и $f(x)>0$ имеет тот же знак, что и $f(x)-1$, а выражение $\log_a f(x) - \log_a g(x)$ при $a>1$ и $f(x)>0$, $g(x)>0$ имеет тот же знак, что и $f(x)-g(x)$ (модифицированный метод интервалов), поэтому неравенство равносильно системе:

$$\begin{cases} \dfrac{6x^2-6x+1-2+5x}{(2-5x-1)(6x^2-6x+1-1)} \le 0, \\ 6x^2-6x+1>0, \\ 2-5x>0; \end{cases} \quad\Longleftrightarrow\quad \begin{cases} \dfrac{6x^2-x-1}{(5x-1)x(x-1)} \ge 0, \\ 6x^2-6x+1>0, \\ x<\dfrac{2}{5}. \end{cases} \quad\Longleftrightarrow$$

$$\begin{cases} x \in \left[-\dfrac{1}{3};0\right) \bigcup \left(\dfrac{1}{5};\dfrac{1}{2}\right] \bigcup (1;+\infty), \\ x \in \left(-\infty;\dfrac{3-\sqrt{3}}{6}\right) \bigcup \left[\dfrac{3+\sqrt{3}}{6};+\infty\right), \\ x<\dfrac{2}{5}; \end{cases} \quad\Longleftrightarrow\quad x \in \left[-\frac{1}{3};0\right) \bigcup \left(\frac{1}{5};\frac{3-\sqrt{3}}{6}\right).$$

О т в е т. $\left[-\dfrac{1}{3};0\right) \bigcup \left(\dfrac{1}{5};\dfrac{3-\sqrt{3}}{6}\right)$.

Задачи

1. (Хим-84.1) Решить неравенство $\dfrac{\sqrt{x-\frac{1}{2}}}{\log_3 x^2} \ge 0$.

2. (М/м-81.1) Решить неравенство $\dfrac{\sqrt{x-5}}{\log_{\sqrt{2}}(x-4)-1} \ge 0$.

3. (Геол-88.3) Решить уравнение $\left(2x^2-5x+2\right)\cdot\left(\log_{2x} 18x+1\right)=0$.

4. (М/м-71.1) Решить уравнение
$(x+4)\log_4(x+1)-(x-4)\log_2(x-1)=\dfrac{8}{3}\log_2(x^2-1)$.

5. (Псих-78.1) Решить уравнение $\log_3\dfrac{3}{x}\log_2 x-\log_3\dfrac{x^3}{\sqrt{3}}=\dfrac{1}{2}+\log_2\sqrt{x}$.

6. (Почв-78.5) Решить уравнение
$$\sqrt{x}(9^{\sqrt{x^2-3}}-3^{\sqrt{x^2-3}})=3^{2\sqrt{x^2-3}+1}-3^{\sqrt{x^2-3}+1}+6\sqrt{x}-18.$$

7. (ВМК-98(1).1) Решить неравенство $\dfrac{1}{\log_2\dfrac{4}{x}}\geq\log_2\dfrac{x}{8}-1$.

8. (ЕГЭ) Решить уравнение $2\cdot 4^x-3\cdot 10^x=5\cdot 25^x$.

9. (Геол-98(1).2) Решить уравнение $\log_9(4^x-2\cdot 18^x)=2x$.

10. (ЕГЭ) При каких значениях параметра a уравнение
$2\cdot 9^x-(2a+3)6^x+3a\cdot 4^x=0$ имеет ровно один корень?

11. (Геол-86.3) Решить уравнение $\dfrac{2\cdot 6^x-4^x-15}{6^x-9^x-5}=3$.

12. (Физ-00(1).7) При каких значениях b уравнение
$25^x-(2b+5)\cdot 5^{x-\frac{1}{x}}+10b\cdot 5^{-\frac{2}{x}}=0$ имеет ровно два решения?

13. (Почв-80.4) Решить неравенство $\left(4x^2-16x+7\right)\cdot\log_2(x-3)>0$.

14. (Геол-95.4) Решить неравенство $\dfrac{3^x-2}{x^2-6x+5}\leq 0$.

15. (ЕГЭ) Указать количество целых решений неравенства
$(2^x-1)(25-5^x)>0$.

16. (ЕГЭ) Решить неравенство $\dfrac{x^2-3}{3^x-4}<0$.

17. (Экон-93.1) Решить неравенство $\log_{7^x-6}25<2$.

18. (М/м-91.2) Решить неравенство $\dfrac{\log_3\left(1-\dfrac{3x}{2}\right)}{\log_9 2x}\geq 1$.

19. (Почв-79.2) Решить неравенство $\dfrac{1}{\log_3(x^2-7x+12)}<\dfrac{1}{\log_3 20}$.

20. (ВМК-97.2) Решить неравенство $\log_{\frac{1}{1-x^2}}2<\log_{2x^2}\dfrac{1}{2}$.

21. (ИСАА-91.5) Решить неравенство $\log_{\log_{\frac{1}{2}}x}\log_{\frac{1}{7}}x>0$.

22. (М/м-89.2) Решить неравенство $\dfrac{\sqrt{2-x^2+2x}+x-2}{\log_3\left(\dfrac{5}{2}-x\right)+\log_3 2}\leq 0$.

11.4. Смешанные задачи

1. (ЕГЭ) Указать число корней уравнения $(2^{x^2}-32)\sqrt{3-x}=0$.

2. (Геогр-98.1) Решить неравенство $\dfrac{\sqrt{-4x^2+13x-3}+1}{\log_{3x}7}\geq 0$.

3. (Экон.К-83.2) Решить уравнение $\sqrt{4-x^2}\cdot(\sin 2\pi x-3\cos\pi x)=0$.

4. (М/м-99(2).1) Решить уравнение
$$(x^2+4)\lg\sin^2 3x+x^2\lg\cos^2 2x=4\lg\left(\cos 2x\sin^3 3x\right).$$

5. (М/м-97.2) Решить неравенство $\left(1-\dfrac{x}{2}\right)\log_{13-3\cdot 2^x}4\leq 1$.

6. (М/м-73.1) Решить уравнение
$\cos 2x+\log_4\dfrac{1}{2}\sin x+2\cos x\log_{\frac{1}{2}}\sin x=2\cos x+\sin^2 x\log_2\sin^2 x$.

7. (Физ-86.3) Решить систему $\begin{cases}3^y=x,\\ 2\sin x+\sin 2x=2\cos^2\dfrac{x}{2}.\end{cases}$

8. (Геол-96.3) Найти все решения уравнения $\dfrac{\cos 10x-\cos 8x}{2x^2+\pi x-\pi^2}=\dfrac{\cos 6x-\cos 4x}{2x^2+\pi x-\pi^2}$, принадлежащие интервалу $(0;\pi)$.

9. (М/м-98(2).2) Решить неравенство $\dfrac{1+\log_{\sqrt{2}}\sqrt{x+4}+\log_{\frac{1}{2}}(13-x)}{|x^2+2x-3|-|2x^2-10x+8|}\geq 0$.

10. (Почв-97(1).4) Решить неравенство $\dfrac{(\log_2 3)^x-(\log_2 3)^2}{(\log_2 3)^{-x}-x\log_{2^x}3}>0$.

11. (ИСАА-92.5) Решить неравенство $\log_{\frac{1}{2}}|\cos x|\cdot\log_5(x^2-9)<0$.

12. (Хим-93(1).4) Решить систему уравнений $\begin{cases}6x^2+17xy+7y^2=16,\\ \log_{2x+y}(3x+7y)=3.\end{cases}$

13. (М/м-98(1).3) Решить неравенство
$\log_2\left(\sqrt{x+\dfrac{11}{2}}+\dfrac{x}{2}+1\right)\cdot\log_3(-2x-x^2)\geq\log_3\left(\dfrac{|x|}{2}+\dfrac{3}{2}\right)\cdot\log_2(-2x-x^2)$.

14. (ИСАА-95.5) Решить неравенство $\sqrt{4x-x^2-3}(\sqrt{2}\cos x-\sqrt{1+\cos 2x})\geq 0$.

15. (Биол-88.5) Решить систему уравнений
$$\begin{cases}\left(\sqrt{3}\cos\dfrac{\pi x}{2}+\sin\dfrac{\pi\,(2x-y-2)}{6}\right)\cdot\left(\sqrt{3-x^2-y^2+2x}-3\right)=0,\\ 3\cos\dfrac{\pi x}{2}+\sin\dfrac{\pi\,(2x-y)}{6}=\sqrt{3}\cos\dfrac{\pi\,(2x-y)}{6}.\end{cases}$$

16. (Геол-95.5) Решить уравнение
$\left(2\sqrt{3}\sin(\pi x + 3\pi) - \operatorname{tg}\left(\pi x - \dfrac{\pi}{2}\right)\right) \cdot \log_2(4 - x^2) = 0$.

17. (М/м-75.5) Найти все значения x в промежутке $-0,5 < x < 1,5$, удовлетворяющие уравнению $\log_3\left(\sin 3x - \cos 2x - \dfrac{3}{10}\right) = \log_3\left(\sin 7x - \cos 6x - \dfrac{3}{10}\right)$.

18. (Экон.К-83.6) Для каждого неотрицательного значения параметра a решить неравенство $a^3x^4 + 6a^2x^2 - x + 9a + 3 \geq 0$.

19. (Экон-84.6) Найти все значения параметра a, при каждом из которых ровно одно решение неравенства

$$x^3\sqrt{a^3 + a^2 - a - 1} - x^2\sqrt{a^3 + a^2} + x\sqrt{a^4 - a^2} - a^2 \leq 0$$

удовлетворяет условию $a \leq x \leq 2a + 1$.

Часть II. Геометрия

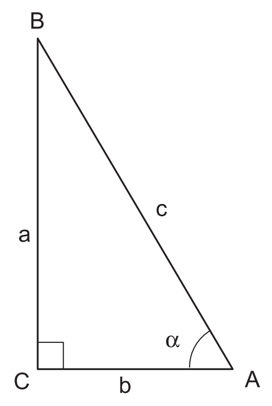
ПЛАНИМЕТРИЯ

1. Треугольники

1.1. Прямоугольные треугольники

Теоретический материал

В этом разделе собраны задачи, связанные с прямоугольными треугольниками. При решении этих задач необходимо знать и уметь применять следующие формулы и теоремы.



Теорема Пифагора: $a^2 + b^2 = c^2$, здесь a, b – катеты прямоугольного треугольника, c – гипотенуза.

Соотношения между сторонами и углами прямоугольного треугольника:

$$\sin\alpha = \frac{a}{c}, \quad \cos\alpha = \frac{b}{c}, \quad \operatorname{tg}\alpha = \frac{a}{b}, \quad \operatorname{ctg}\alpha = \frac{b}{a};$$

здесь α – угол, противолежащий катету a.

Соотношения между тригонометрическими функциями одного и того же аргумента:

$$\sin^2\alpha + \cos^2\alpha = 1, \qquad \operatorname{tg}\alpha = \frac{\sin\alpha}{\cos\alpha}, \qquad \operatorname{ctg}\alpha = \frac{\cos\alpha}{\sin\alpha},$$

$$\operatorname{tg}\alpha\cdot\operatorname{ctg}\alpha = 1, \qquad 1 + \operatorname{tg}^2\alpha = \frac{1}{\cos^2\alpha}, \qquad 1 + \operatorname{ctg}^2\alpha = \frac{1}{\sin^2\alpha}.$$

Значения тригонометрических функций основных углов:

$$\sin\frac{\pi}{4} = \cos\frac{\pi}{4} = \frac{\sqrt{2}}{2}, \qquad \operatorname{tg}\frac{\pi}{4} = \operatorname{ctg}\frac{\pi}{4} = 1,$$

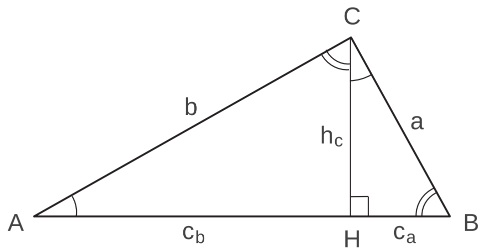
$$\sin\frac{\pi}{6} = \cos\frac{\pi}{3} = \frac{1}{2}, \qquad \sin\frac{\pi}{3} = \cos\frac{\pi}{6} = \frac{\sqrt{3}}{2},$$

$$\operatorname{tg}\frac{\pi}{6} = \operatorname{ctg}\frac{\pi}{3} = \frac{\sqrt{3}}{3}, \qquad \operatorname{tg}\frac{\pi}{3} = \operatorname{ctg}\frac{\pi}{6} = \sqrt{3}.$$

Формула длины высоты, проведённой к гипотенузе:

$$h_c = \frac{ab}{c} = \sqrt{c_a c_b},$$

где c_a и c_b – проекции катетов a и b на гипотенузу c.



Для доказательства первого равенства достаточно записать площадь треугольника ABC двумя способами:

$$S_{\Delta ABC} = \frac{1}{2}h_c c = \frac{1}{2}ab \quad \Longrightarrow \quad h_c = \frac{ab}{c}.$$

Справедливость второго равенства следует из подобия треугольников, на которые высота, проведённая из вершины прямого угла, разбивает исходный треугольник:

$$\Delta ACH \sim \Delta CBH \quad \Longrightarrow \quad \frac{h_c}{c_b} = \frac{c_a}{h_c} \quad \Longrightarrow \quad h_c = \sqrt{c_a c_b}.$$

Заметим также, что оба треугольника подобны исходному треугольнику ABC по двум углам:

$$\Delta ACH \sim \Delta ABC \quad (\angle AHC = \angle ACB = 90^\circ, \text{ угол } A \text{ общий}),$$

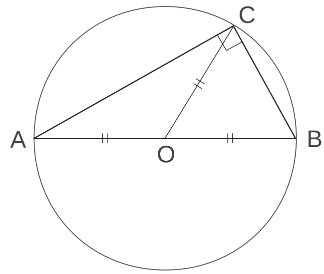
$$\Delta CBH \sim \Delta ABC \quad (\angle CHB = \angle ACB = 90^\circ, \text{ угол } B \text{ общий}).$$

Напомним основные факты, связанные с произвольными треугольниками.

- Сумма углов треугольника равна 180°.
- Медианы треугольника пересекаются в одной точке и делятся ею в отношении $2:1$, считая от вершины.
- Высоты треугольника пересекаются в одной точке.
- Биссектрисы треугольника пересекаются в одной точке, и эта точка есть центр вписанной окружности. При этом радиус, проведённый в точку касания, перпендикулярен соответствующей стороне треугольника, а отрезки касательных, проведённых из одной вершины – равны.[6]
- Серединные перпендикуляры к сторонам треугольника пересекаются в одной точке, и эта точка есть центр описанной окружности.

[6] Более подробно свойства окружностей будут рассмотрены в соответствующем разделе.

З а м е ч а н и е. Центр описанной окружности лежит внутри треугольника, если треугольник остроугольный, и вне треугольника, если он тупоугольный. Центр окружности, описанной около прямоугольного треугольника, лежит на середине гипотенузы. В этом случае радиус описанной окружности равен медиане, проведённой к гипотенузе, и половине гипотенузы.

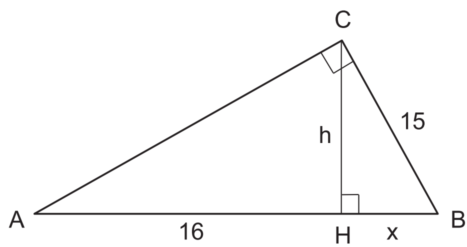


Примеры решения задач

П р и м е р 1. Один из катетов прямоугольного треугольника равен 15, а проекция второго катета на гипотенузу равна 16. Найдите диаметр окружности, описанной около этого треугольника.

Р е ш е н и е. Пусть катет $BC = 15$, а проекция катета AC на гипотенузу AB равна 16.

Поскольку диаметр окружности, описанной около прямоугольного треугольника, равен гипотенузе, нам надо найти проекцию катета BC на гипотенузу. Обозначим высоту CH через h, а проекцию катета BC на гипотенузу через x. По свойству высоты, проведённой к гипотенузе, и теореме Пифагора, применённой к ΔBCH, получим



$$\begin{cases} h^2 = 16x, \\ h^2 + x^2 = 15^2; \end{cases} \implies x^2 + 16x - 15^2 = 0 \implies x = 9,$$

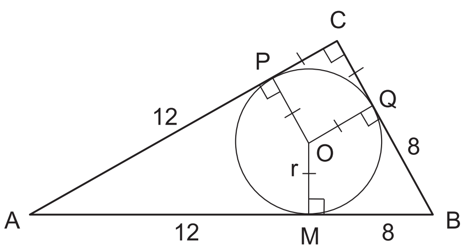
откуда диаметр $d = AB = 25$.

О т в е т. 25.

П р и м е р 2. Окружность с центром O вписана в прямоугольный треугольник ABC. Она касается гипотенузы AB в точке M, причём $AM = 12$ и $BM = 8$. Найдите площадь треугольника AOB.

Р е ш е н и е. Для того, чтобы найти площадь треугольника AOB, нам надо найти его высоту OM, которая равна радиусу вписанной окружности. Его и будем искать.

Пусть P и Q – точки касания вписанной окружности с катетами AC и BC. Четырёхугольник $PCQO$ является прямоугольником, поскольку у него $\angle C = 90^\circ$ по условию, а $OP \perp PC$ и $OQ \perp QC$ как радиусы в точках касания. Кроме того, он является квадратом, так как $OP = OQ = r$, где r – радиус вписанной окружности.



По свойству касательных, проведённых из одной точки, $AP = AM = 12$ и $BQ = BM = 8$.

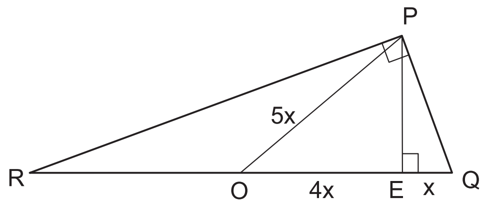
Применив теорему Пифагора к треугольнику ABC, получим:

$$(12+8)^2 = (12+r)^2 + (8+r)^2 \quad \Longrightarrow \quad r = 4 \quad \Longrightarrow \quad S_{\Delta AOB} = \frac{1}{2}AB \cdot r = 40.$$

Ответ. 40.

Пример 3. Определить отношение длин медианы PO и высоты PE, проведённых из вершины P к гипотенузе QR в прямоугольном треугольнике PQR, если $QO : QE = 5 : 1$.

Решение. Пусть $QE = x$, тогда $QO = 5x$ и, следовательно, $EO = 4x$. Выразим через x высоту PE.



Так как в прямоугольном треугольнике медиана равна половине гипотенузы, то

$$PO = \frac{1}{2}QR = QO = 5x.$$

Применив теорему Пифагора к ΔPOE, получим:

$$PE = \sqrt{(5x)^2 - (4x)^2} = 3x \quad \Longrightarrow \quad \frac{PO}{PE} = \frac{5x}{3x} = \frac{5}{3}.$$

Ответ. $5 : 3$.

Задачи

1. В прямоугольном треугольнике угол между биссектрисой и высотой, проведёнными из вершины прямого угла, равен 10°. Найдите острые углы треугольника.

2. Катеты прямоугольного треугольника имеют длину 12 и 5. Найдите длину медианы, проведённой к гипотенузе.

3. В прямоугольном треугольнике острые углы относятся как $1 : 2$, а больший катет равен $4\sqrt{3}$. Найти радиус окружности, описанной около треугольника.

4. Найдите площадь прямоугольного треугольника, если длина гипотенузы равна $2\sqrt{13}$ см, а длина медианы большего острого угла равна 5 см.

5. Средние линии прямоугольного треугольника, параллельные катетам, равны 5 см и 12 см. Найдите высоту треугольника h, опущенную из вершины прямого угла. В ответе запишите $13h$.

6. В прямоугольном треугольнике ABC угол C прямой, CM – медиана треугольника. Найти острые углы треугольника, если угол AMC равен $42°$.

7. Медиана AM треугольника ABC равна половине стороны BC. Угол между AM и высотой AH равен $40°$. Найти углы треугольника ABC.

8. В прямоугольном треугольнике ABC $AC = 3$, $BC = 4$. Окружность с центром в точке A проходит через точку C и пересекает гипотенузу AB в точке K. Найти отношение длин отрезков AK и BK.

9. В прямоугольном треугольнике медианы, проведённые к катетам, равны $\sqrt{52}$ и $\sqrt{73}$. Найти гипотенузу.

10. Найдите площадь прямоугольного треугольника, если радиусы его вписанной и описанной окружностей равны соответственно 2 см и 5 см.

11. В прямоугольном треугольнике один из катетов больше медианы, проведённой из вершины прямого угла, на $0,5$. Найти его площадь, если второй катет равен 4.

12. В треугольнике ABC известны стороны $AC = 2$, $AB = 3$, $BC = 4$. Пусть BD – высота этого треугольника. Найти длину отрезка AD.

13. Найдите диаметр окружности, описанной около прямоугольного треугольника, если один из его катетов равен 20, а проекция другого катета на гипотенузу равна 9.

14. Около окружности с центром O описан прямоугольный треугольник MPK с гипотенузой MK. Луч MO пересекает катет PK в точке C. Найдите длину отрезка CP, если точка касания с окружностью делит катет PK на отрезки $PH = 4$ и $HK = 12$.

15. Катеты прямоугольного треугольника равны 8 и 15. Чему равно расстояние от вершины прямого угла до центра вписанной в этот треугольник окружности?

16. В прямоугольном треугольнике ABC с гипотенузой $AC = 20$ проведена медиана BM. Окружность, вписанная в треугольник ABM, касается медианы BM в точке P. Найдите катет BC, если $BP : PM = 3 : 2$.

17. В треугольнике ABC $\angle B = 90°$, медиана $BM = 10\sqrt{3}$. Окружность, вписанная в треугольник ABM, касается гипотенузы AC в точке T. Найдите BC, если $AT : TC = 1 : 3$.

18. Пусть r – радиус окружности, вписанной в прямоугольный треугольник с катетами a, b и гипотенузой c. Докажите, что $r = \dfrac{a+b-c}{2}$.

1.2. Общие треугольники. Теоремы синусов, косинусов

Теоретический материал

В этом разделе собраны задачи, при решении которых используются следующие теоремы, справедливые для любого треугольника.

Теорема синусов: $\dfrac{a}{\sin\alpha} = \dfrac{b}{\sin\beta} = \dfrac{c}{\sin\gamma} = 2R.$

Теорема косинусов: $c^2 = a^2 + b^2 - 2ab\cdot\cos\gamma.$

Здесь и далее a, b, c – стороны треугольника; α, β, γ – противолежащие им углы; R – радиус описанной около треугольника окружности.

Напомним также и некоторые другие утверждения, справедливые для произвольных треугольников.

- В треугольнике любая сторона меньше суммы двух других сторон (*неравенство треугольника*).
- В треугольнике напротив большей стороны лежит больший угол.
- Площадь треугольника равна

  $$S = \frac{1}{2}ab\sin\gamma, \quad S = \frac{1}{2}ch_c, \quad S = \frac{abc}{4R}, \quad S = \sqrt{p(p-a)(p-b)(p-c)}, \quad S = pr,$$

  где r – радиус вписанной окружности, p – полупериметр треугольника.

Кроме того, при решении задач этого раздела могут пригодиться следующие тригонометрические формулы.

Формулы приведения: $\sin\left(\dfrac{\pi}{2} - x\right) = \cos x; \quad \cos\left(\dfrac{\pi}{2} - x\right) = \sin x.$

Формулы двойного аргумента:

$$\sin 2x = 2\sin x\cos x; \quad \cos 2x = \cos^2 x - \sin^2 x = 2\cos^2 x - 1 = 1 - 2\sin^2 x.$$

Формулы для тригонометрических функций от суммы и разности:

$$\sin(x \pm y) = \sin x\cos y \pm \cos x\sin y;$$

$$\cos(x \pm y) = \cos x\cos y \mp \sin x\sin y.$$

Примеры решения задач

П р и м е р 1. В треугольник со сторонами $AB = 8$, $BC = 6$, $AC = 4$ вписана окружность. Найти длину отрезка DE, где D и E – точки касания этой окружности со сторонами AB и AC соответственно.

Р е ш е н и е. Для того, чтобы вычислить DE, необходимо знать AE, AD и косинус угла между ними. Тогда по теореме косинусов можно будет найти DE.

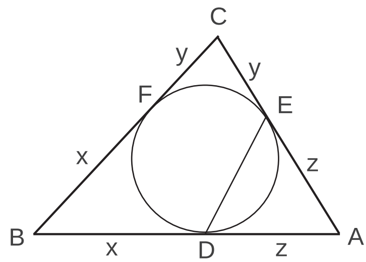
Обозначим равные отрезки касательных

$$BD = BF = x,\ CF = CE = y,\ AE = AD = z.$$

По условию

$$\begin{cases} x + y = 6, \\ y + z = 4, \\ x + z = 8; \end{cases}$$

откуда $z = 3$.



Из теоремы косинусов, применённой к ΔABC, получим

$$6^2 = 8^2 + 4^2 - 2\cdot 8\cdot 4\cdot\cos\alpha \quad\Longleftrightarrow\quad \cos\alpha = \frac{11}{16}.$$

Теперь применим теорему косинусов к ΔADE:

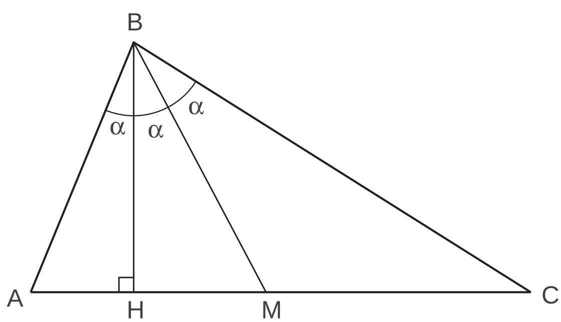
$$DE^2 = 3^2 + 3^2 - 2\cdot 3\cdot 3\cdot\frac{11}{16} = \frac{45}{8},$$

откуда $DE = \dfrac{3\sqrt{10}}{4}$.

Ответ. $\dfrac{3\sqrt{10}}{4}$.

Пример 2. Определить стороны треугольника, если медиана и высота, проведённые из вершины одного угла, делят угол на три равные части, а сама медиана равна 10.

Решение. Пусть BH и BM – соответственно высота и медиана треугольника ABC и $\angle ABH = \angle HBM = \angle MBC = \alpha$, тогда $\angle BAH = \dfrac{\pi}{2} - \alpha$, $\angle BCA = \dfrac{\pi}{2} - 2\alpha$. Для того, чтобы найти стороны треугольника, достаточно найти угол α.



Применим к треугольникам ABM и BMC теорему синусов:

$$\frac{AM}{\sin 2\alpha} = \frac{BM}{\sin\left(\dfrac{\pi}{2} - \alpha\right)}, \qquad \frac{MC}{\sin\alpha} = \frac{BM}{\sin\left(\dfrac{\pi}{2} - 2\alpha\right)}.$$

Теперь поделим почленно одно равенство на другое. Поскольку $AM = MC$, получим

$$\frac{\cos 2\alpha}{\cos\alpha} = \frac{\sin\alpha}{\sin 2\alpha} \quad\Longleftrightarrow\quad \sin 4\alpha = \sin 2\alpha \quad\Longleftrightarrow\quad \sin 2\alpha\cdot(2\cos 2\alpha - 1) = 0.$$

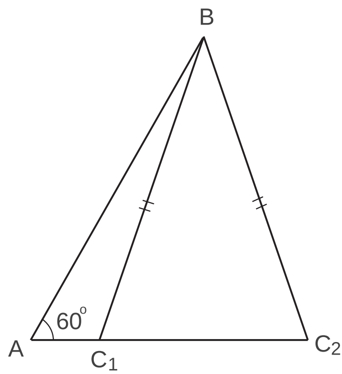
Так как $0 < 3\alpha < \pi$, то $\sin 2\alpha \neq 0$. Следовательно, $\cos 2\alpha = \dfrac{1}{2}$, откуда $\alpha = \dfrac{\pi}{6}$, $\angle ABC = 3\alpha = \dfrac{\pi}{2}$, $\angle BAC = \dfrac{\pi}{3}$ и $\angle ACB = \dfrac{\pi}{6}$. По условию медиана $BM = 10$, следовательно, гипотенуза $AC = 2BM = 20$, а катеты $AB = 10$ и $BC = 10\sqrt{3}$.

Ответ. $20;\ 10;\ 10\sqrt{3}$.

П р и м е р 3. В треугольнике ABC сторона $AB = 24$, $\angle BAC = 60^\circ$, радиус описанной окружности равен 13. Найти сторону AC.

Р е ш е н и е. Для нахождения стороны AC надо знать сторону BC, которую легко найти с помощью теоремы синусов:

$$\frac{BC}{\sin 60^\circ} = 2R \quad \Longrightarrow \quad BC = 13\sqrt{3}.$$



Теперь обозначим искомую сторону AC через x и запишем теорему косинусов для ΔABC:

$$(13\sqrt{3})^2 = 24^2 + x^2 - 2 \cdot 24 \cdot x \cdot \cos 60^\circ \quad \Longleftrightarrow$$

$$\Longleftrightarrow \quad x^2 - 24x + 69 = 0 \quad \Longleftrightarrow \quad x_{1,2} = 12 \pm 5\sqrt{3}.$$

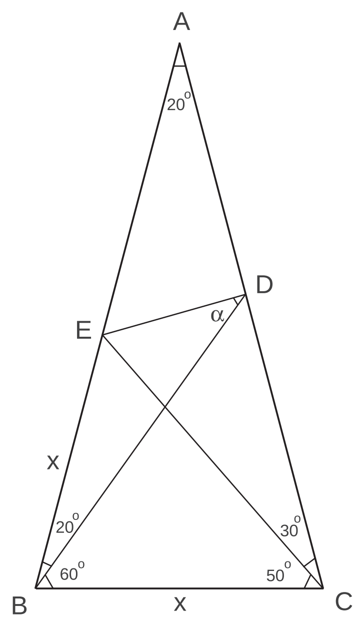
В обоих случаях

$$AB = 24 > BC = 13\sqrt{3} > AC = x_{1,2} = 12 \pm 5\sqrt{3}.$$

Следовательно, существует два треугольника (ΔABC_1 – тупоугольный и ΔABC_2 – остроугольный), удовлетворяющих условиям нашей задачи.

О т в е т. $12 \pm 5\sqrt{3}$.

П р и м е р 4. Пусть равнобедренный треугольник ABC имеет углы B и C, равные 80°. На отрезке AC взята точка D, а на отрезке AB – точка E так, что $\angle DBC = 60^\circ$ и $\angle ECB = 50^\circ$. Найти угол EDB.



Р е ш е н и е. Треугольник BCE является равнобедренным, так как у него

$$\angle BEC = 180^\circ - \angle ABC - \angle BCE = 50^\circ = \angle BCE.$$

Обозначим $BC = BE = x$, $\angle BDE = \alpha$ и применим теорему синусов к ΔBDE и ΔBDC:

$$\frac{BD}{\sin(\alpha + 20^\circ)} = \frac{x}{\sin\alpha}, \qquad \frac{BD}{\sin 80^\circ} = \frac{x}{\sin 40^\circ}.$$

Поделив равенства почленно одно на другое, получим

$$\frac{\sin 80^\circ}{\sin(\alpha + 20^\circ)} = \frac{\sin 40^\circ}{\sin\alpha} \quad \Longleftrightarrow$$

$$\Longleftrightarrow \quad 2\cos 40^\circ \sin\alpha = \sin(\alpha + 20^\circ) \quad \Longleftrightarrow$$

$$\Longleftrightarrow \quad 2\cos(60^\circ - 20^\circ)\sin\alpha = \sin(\alpha + 20^\circ) \quad \Longleftrightarrow$$

$$\Longleftrightarrow \quad \cos 20^\circ \sin\alpha + \sqrt{3}\sin 20^\circ \sin\alpha = \sin\alpha\cos 20^\circ + \cos\alpha\sin 20^\circ \quad \Longleftrightarrow$$

$$\Longleftrightarrow \quad \sqrt{3}\sin 20^\circ \sin\alpha = \cos\alpha \sin 20^\circ \quad \Longleftrightarrow \quad \operatorname{ctg}\alpha = \sqrt{3}.$$

Следовательно, искомый угол $\alpha = \angle EDB = 30^\circ$.

О т в е т. 30°.

Задачи

1. Есть ли тупой угол у треугольника, стороны которого равны 10, 14 и 7?

2. Стороны треугольника равны 2, 3, 4. Какой это треугольник: прямоугольный, остроугольный или тупоугольный?

3. Угол при вершине равнобедренного треугольника равен 120°. Боковая сторона равна 4. Найдите квадрат длины медианы, проведённой к боковой стороне.

4. Из точки A, лежащей на окружности, проведены две хорды, равные 7 и 15. Найдите диаметр окружности, если расстояние между серединами хорд равно 10.

5. Найти углы треугольника, если высота и медиана, проведённые из одной и той же вершины, образуют с боковыми сторонами углы, равные α.

6. Биссектриса одного из острых углов прямоугольного треугольника в 6 раз короче гипотенузы. Найти острые углы треугольника.

7. Найти радиус окружности, описанной около треугольника со сторонами 5, $\sqrt{7}$, $2\sqrt{3}$.

8. В треугольник ABC вписана окружность, которая касается сторон AB, BC, AC соответственно в точках M, D, N. Известно, что $NA = 2$, $NC = 3$, $\widehat{BCA} = \dfrac{\pi}{3}$. Найти MD.

9. Известны длины двух сторон $a = 7$, $b = 9$ треугольника и его площадь $S = 14\sqrt{5}$. Третья сторона треугольника больше удвоенной медианы, проведённой к ней. Найти радиус окружности, вписанной в этот треугольник.

10. У треугольника известны длины двух сторон и площадь: $a = 6$, $b = 8$, $S = 3\sqrt{15}$. Третья его сторона меньше удвоенной медианы, проведённой к ней. Найти радиус вписанной в этот треугольник окружности.

11. Прямая, проходящая через точки G и K, служит биссектрисой угла FGH. Известно, что $KF \perp GF$, $KH \perp GH$, $KF = KH = 8$, $GK = 17$. Отрезок GL содержит точку F, $FL = 2$. Отрезок GM содержит точку H и $HM = 19$. Найти длину отрезка ML.

12. В треугольнике KMN сторона $KM = 6$, $MN - KN = 2$, $\cos\angle KMN = 3/5$. Найти площадь треугольника KMN.

13. Известно, что радиус окружности, описанной около треугольника ABC, равняется стороне AB этого треугольника. Найти высоту треугольника ABC, проведённую из точки C, если она меньше $1/2$, а две другие стороны треугольника равны 2 и $\sqrt{3}$.

14. В треугольнике ABC известны стороны $AB = 7$, $AC = 8$ и $\cos\angle BAC = \dfrac{11}{16}$. На стороне BC выбрана такая точка D, что $DC : BC = 1 : 3$. Найти радиус окружности, вписанной в треугольник ABD.

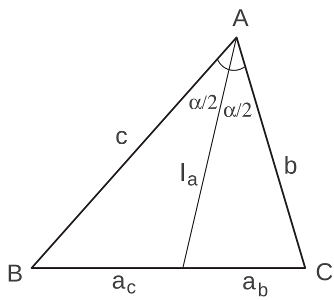
1.3. Медиана, биссектриса, высота

Теоретический материал

В этом разделе собраны задачи, связанные с медианами, биссектрисами и высотами. При решении этих задач, помимо утверждений и формул, приведённых в предыдущих разделах, будут полезными следующие теоремы.

Теорема о биссектрисе. Биссектриса треугольника делит противолежащую сторону на отрезки, пропорциональные прилежащим сторонам:

$$\frac{a_b}{a_c} = \frac{b}{c}.$$



Формулы длины биссектрисы:

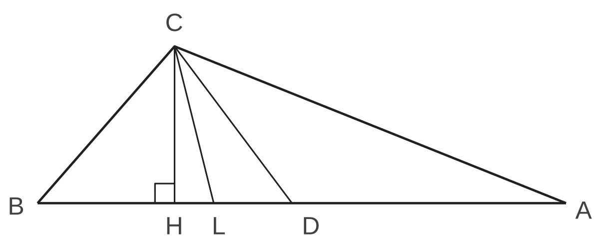
$$l_a = \frac{2bc\cdot\cos\frac{\alpha}{2}}{b+c}, \quad l_a^2 = bc - a_b a_c.$$

Формула длины медианы: $m_a^2 = \dfrac{b^2+c^2}{2} - \dfrac{a^2}{4}.$

Примеры решения задач

Пример 1. Доказать, что если в треугольнике из одной вершины проведены медиана, биссектриса и высота, то биссектриса лежит между медианой и высотой.

Решение. Рассмотрим треугольник ABC, где высота CH, биссектриса CL и медиана CD проведены к стороне AB.



Если $BC = AC$, то CH, CL и CD совпадают. Пусть для определённости $AC > BC$.

По свойству биссектрисы

$$\frac{BL}{AL} = \frac{BC}{AC} < 1 \quad\Longrightarrow\quad BL < AL \quad\Longrightarrow\quad BL < BA/2 = BD$$

и, следовательно, точка L лежит между точками B и D.

Теперь покажем, что $\angle BCH < \angle BCL$:

$$AC > BC \quad\Longrightarrow\quad \angle CBA > \angle CAB \quad\Longrightarrow\quad \angle BCH < \angle ACH \quad\Longrightarrow$$

$$\Longrightarrow\quad \angle BCH < \angle BCA/2 = \angle BCL$$

и, следовательно, биссектриса лежит между медианой и высотой.

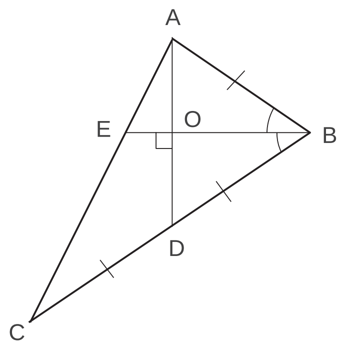
Пример 2. Доказать, что если в треугольнике две высоты равны, то он равнобедренный.

Решение. Рассмотрим треугольник со сторонами a, b, c и высотами h_a, h_b, h_c. Площадь треугольника равна

$$S = \frac{ah_a}{2} = \frac{bh_b}{2}.$$

Следовательно, если $h_a = h_b$, то и $a = b$.

Пример 3. В треугольнике ABC биссектриса BE и медиана AD перпендикулярны и имеют одинаковую длину, равную 4. Найти стороны треугольника ABC.



Решение. Пусть биссектриса BE и медиана AD пересекаются в точке O. В треугольнике ABD отрезок BO является биссектрисой и высотой одновременно, следовательно, треугольник ABD равнобедренный. Пусть $AB = BD = x$.

По свойству биссектрисы

$$\frac{AE}{EC} = \frac{AB}{BC} = \frac{1}{2}.$$

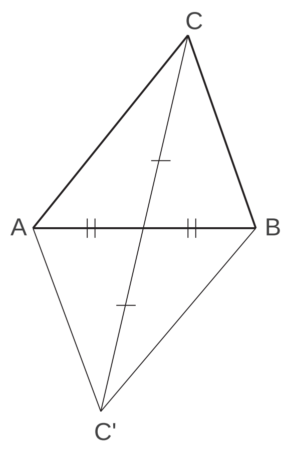
Пусть $AE = y$, тогда $EC = 2y$. По формулам для квадратов длин медианы и биссектрисы получаем:

$$AD^2 = \frac{2x^2 + 2(3y)^2 - (2x)^2}{4} = 4^2, \quad BE^2 = 2x^2 - 2y^2 = 4^2,$$

откуда $x^2 = 13$, $y^2 = 5$. В итоге: $AB = \sqrt{13}$, $BC = 2\sqrt{13}$, $AC = 3\sqrt{5}$.

Ответ. $\sqrt{13}$; $2\sqrt{13}$; $3\sqrt{5}$.

Пример 4. Доказать, что сумма медиан треугольника
а) меньше P;
б) больше $\frac{3}{4}P$, где P – периметр треугольника.



Решение. а) Достроим ΔABC до параллелограмма $ACBC'$ и запишем неравенство треугольника для $\Delta ACC'$:

$$CC' < AC + AC' \quad \Longleftrightarrow \quad 2m_c < a + b.$$

Аналогичным образом демонстрируется справедливость неравенств

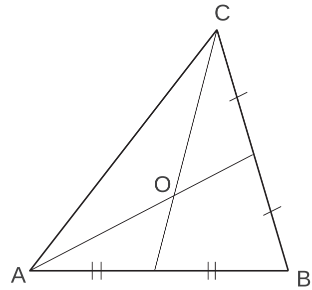
$$2m_b < a + c, \quad 2m_a < b + c.$$

Сложив эти три неравенства и поделив на два, получим:

$$m_a + m_b + m_c < P.$$

б) Пусть медианы пересекаются в точке O. Запишем неравенство треугольника для ΔACO:

$$AC < CO + AO \iff b < \frac{2}{3}(m_c + m_a).$$



Аналогично можно получить неравенства для сторон a и c. Сложив все три неравенства, получим:

$$\frac{4}{3}(m_a + m_b + m_c) > P \iff m_a + m_b + m_c > \frac{3}{4}P,$$

что и требовалось доказать.

Задачи

1. Доказать, что если у треугольника равны две медианы, то он равнобедренный.
2. Медиана треугольника совпадает с его биссектрисой. Доказать, что этот треугольник равнобедренный.
3. Найдите площадь прямоугольного треугольника, если биссектриса прямого угла делит гипотенузу на отрезки длины 15 и 20.
4. Найдите биссектрисы острых углов прямоугольного треугольника, катеты которого равны 18 и 24.
5. В окружность радиуса $4\sqrt{3}$ вписан треугольник ABC, в котором $\angle A = 60^\circ$, а сторона AB в два раза больше стороны AC. В треугольнике проведена биссектриса AM. Найдите длину отрезка MC.
6. В треугольнике BCE угол $\angle C = 60^\circ$, $CE : BC = 3 : 1$. Отрезок CK – биссектриса треугольника. Найдите KE, если радиус описанной около треугольника окружности равен $8\sqrt{3}$.
7. Зная угол α при вершине треугольника, определите острый угол между биссектрисами двух других углов треугольника.
8. Зная углы α и β при основании треугольника, определите угол между высотой и биссектрисой, проведёнными из угла, противолежащего основанию.
9. Медианы треугольника равны 3, 4, 5. Какой это треугольник: прямоугольный, остроугольный или тупоугольный?
10. Высоты треугольника равны 3, 4, 5. Какой это треугольник: прямоугольный, остроугольный или тупоугольный?
11. В треугольнике ABC медианы AD и BE пересекаются под прямым углом. Известно, что $AC = 3$, $BC = 4$. Найти сторону AB этого треугольника.
12. В треугольнике известны длины двух его сторон 6 и 3. Полусумма длин высот, опущенных на эти стороны, равна длине третьей высоты. Найти длину его третьей стороны.

13. В треугольнике ABC угол A – прямой. Из вершины A проведены медиана AM, высота AH и биссектриса AL. Доказать, что AL – биссектриса в треугольнике AMH.

14. В треугольнике ABC даны стороны b и c. Угол α вдвое больше угла β. Найти сторону a.

15. Доказать, что в любом треугольнике большей стороне соответствует меньшая биссектриса.

16. Две биссектрисы у треугольника равны. Доказать, что он равнобедренный.

17. В треугольнике KLM проведены биссектрисы LE и KF углов KLM и LKM соответственно, которые пересекаются в точке O. Известно, что $KL = LE$, периметр треугольника KLM равен 34, $LO = 3 \cdot OE$. Найти ML.

18. В треугольнике ABC угол C равен 120°, а биссектриса угла C равна 3. Длины сторон AC и BC относятся как 3:2 соответственно. Найти тангенс угла A и сторону BC.

19. В треугольнике KLM длина стороны $KL = 24$, длина биссектрисы $LN = 24$, а длина отрезка $MN = 9$. Определить периметр треугольника LMN.

20. В треугольнике ABC с длинами сторон $a = 7$, $b = 5$, $c = 3$ проведена биссектриса AD. Вокруг треугольника ABD описана окружность, а в треугольник ACD вписана окружность. Найти произведение их радиусов.

1.4. Подобие треугольников. Теорема Фалеса

Теоретический материал

Два треугольника называются *подобными*, если у них равны все три угла, а соответствующие стороны пропорциональны.

Признаки подобия треугольников:

1. Если два угла одного треугольника равны двум углам другого треугольника, то треугольники подобны.

2. Если один угол первого треугольника равен углу второго треугольника, а прилежащие к этим углам стороны треугольников пропорциональны, то треугольники подобны.

3. Если три стороны одного треугольника пропорциональны трём сторонам другого треугольника, то треугольники подобны.

З а м е ч а н и е 1. В подобных фигурах углы между любыми сходственными линейными элементами равны; отношение длин сходственных линейных элементов равно коэффициенту подобия.

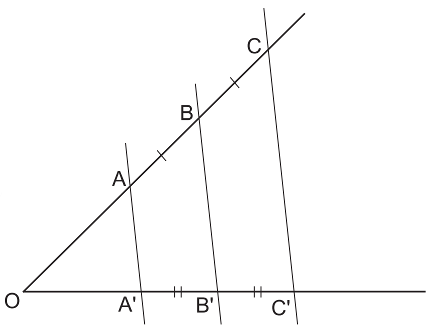
То есть не только длины сходственных сторон, но и длины биссектрис, медиан, высот, периметров, радиусов вписанных и описанных окружностей относятся как коэффициент подобия.

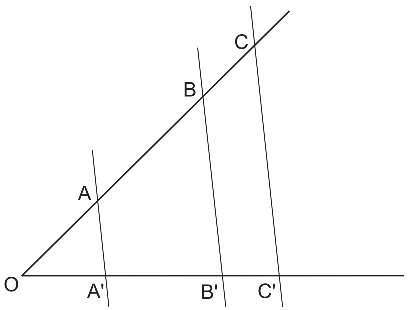
З а м е ч а н и е 2. В подобных фигурах площади любых сходственных элементов относятся как квадрат коэффициента подобия.

Напомним также и некоторые другие полезные сведения.

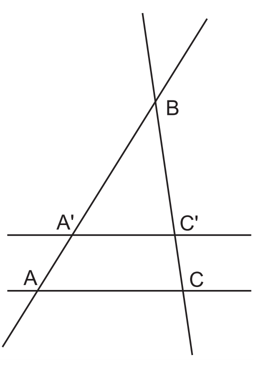
- Соответственные и накрест лежащие углы при параллельных прямых равны.
- **Теорема Фалеса.** Если при пересечении сторон угла параллельными прямыми на одной стороне угла отсекаются равные между собой отрезки, то и на другой стороне угла отсекаются также равные между собой отрезки (левый рисунок).
- **Обобщенная теорема Фалеса.** При пересечении сторон угла параллельными прямыми на сторонах угла отсекаются пропорциональные отрезки (правый рисунок)

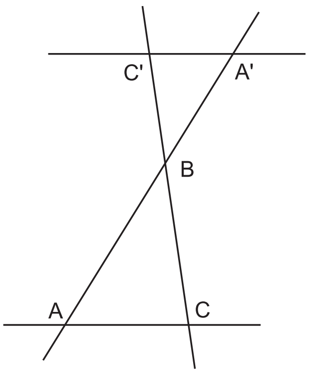
$$\frac{AO}{A'O} = \frac{AB}{A'B'} = \frac{BC}{B'C'}.$$



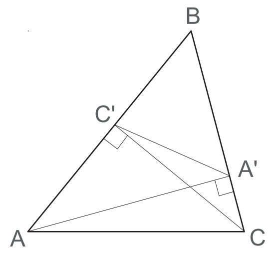


Наиболее распространенными являются ситуации, когда пара подобных треугольников возникает при пересечении параллельными прямыми двух пересекающихся прямых.





В обоих случаях треугольники ABC и $A'BC'$ подобны по первому признаку подобия треугольников. В первом случае углы $\angle A = \angle A'$ и $\angle C = \angle C'$ как соответственные, во втором – как накрест лежащие при параллельных прямых.



В теореме, приведённой ниже, описывается ещё один случай возникновения пары подобных треугольников.

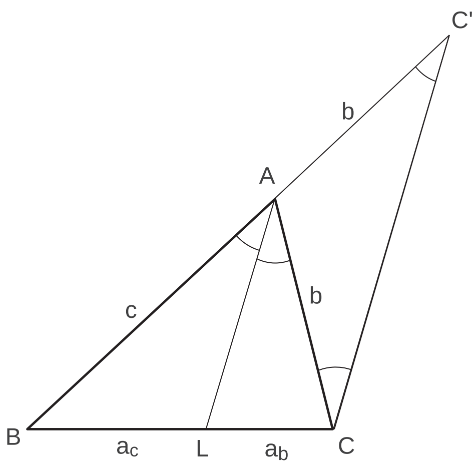
Теорема о высотах. Если AA' и CC' – две высоты остроугольного треугольника ABC, то треугольники $A'BC'$ и ABC подобны с коэффициентом $\cos\angle B$.

Замечание. В треугольнике с тупым углом $\angle B$ коэффициент подобия соответствующих треугольников равен $|\cos\angle B|$.

Примеры решения задач

Пример 1 (теорема о биссектрисе). Доказать, что биссектриса треугольника делит противолежащую сторону на отрезки, пропорциональные прилежащим сторонам:

$$\frac{a_b}{a_c} = \frac{b}{c}.$$



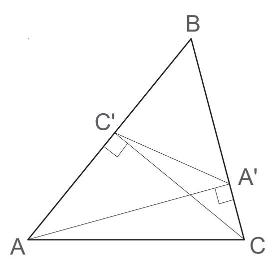
Решение. Пусть AL – биссектриса треугольника ABC. Через вершину C проведём прямую, параллельную AL, которая пересечёт прямую AB в точке C'. Заметим, что $\angle BAL = \angle AC'C$ как соответственные и $\angle CAL = \angle ACC'$ как внутренние накрест лежащие, следовательно, $\angle AC'C = \angle ACC'$ и треугольник ACC' является равнобедренным.

По теореме Фалеса получим

$$\frac{CL}{LB} = \frac{C'A}{AB} \iff \frac{a_b}{a_c} = \frac{b}{c},$$

что и требовалось доказать.

Пример 2 (теорема о высотах). Пусть AA' и CC' – две высоты остроугольного треугольника ABC. Доказать, что $\Delta A'BC' \sim \Delta ABC$ с коэффициентом подобия $\cos\angle B$.



Решение. Запишем косинус угла B двумя способами:

$$\cos\angle B = \frac{BA'}{BA} \quad (\Delta ABA'), \quad \cos\angle B = \frac{BC'}{BC} \quad (\Delta CBC').$$

Теперь рассмотрим треугольники $\Delta A'BC'$ и ΔABC. У них угол $\angle B$ общий, а длины соответствующих сторон связаны соотношением

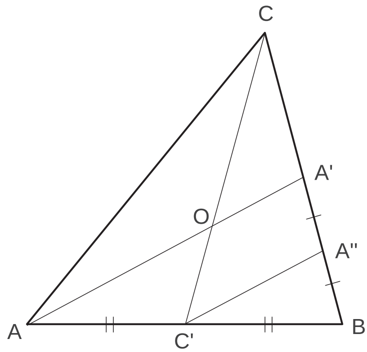
$$\frac{BA'}{BA} = \frac{BC'}{BC} = \cos\angle B,$$

следовательно, треугольники подобны по первому признаку подобия треугольников, причем коэффициент подобия равен $\cos\angle B$.

П р и м е р 3 (теорема о медианах). Доказать, что медианы треугольника пересекаются в одной точке и делятся ею в отношении $2:1$, считая от вершины.

Р е ш е н и е. Пусть AA' и CC' – медианы ΔABC. Проведём отрезок $C'A'' \parallel AA'$. По теореме Фалеса из равенства отрезков $AC' = C'B$ следует равенство отрезков $A'A'' = A''B$, следовательно,

$$A'A'' = \frac{1}{2}A'B = \frac{1}{2}A'C.$$



Теперь применим теорему Фалеса к $\angle BCC'$:

$$\frac{CO}{OC'} = \frac{CA'}{A'A''} = 2.$$

Таким образом, мы доказали, что медиана AA' проходит через точку $O \in CC'$, которая делит медиану CC' в отношении $2:1$. Аналогичным образом показывается, что и медиана BB' тоже проходит через точку O. Следовательно, медианы треугольника пересекаются в точке O и делятся ею в отношении $2:1$, считая от вершины.

Задачи

1. В равнобедренном треугольнике ABC ($AB = BC$) на стороне BC взята точка D так, что $BD : DC = 1 : 4$. В каком отношении прямая AD делит высоту BE треугольника ABC, считая от вершины B?

2. Дан треугольник ABC и точки E и F на сторонах BC и AC соответственно, O – точка пересечения отрезков AE и BF, причём $AO : OE = 3 : 1$ и $AF : FC = 6 : 5$. В каком отношении точка E делит сторону BC?

3. Длина основания треугольника равна 36. Прямая, параллельная основанию, делит площадь треугольника пополам. Найти длину отрезка этой прямой, заключённого между сторонами треугольника.

4. Прямая, параллельная основанию треугольника, делит его на части, площади которых относятся как 2:1. В каком отношении, считая от вершины, она делит боковые стороны?

5. В прямоугольном треугольнике ABC из вершины прямого угла C опущена высота CD. Вычислите гипотенузу AB, если $AC = 5$, $AD = 2$.

6. Высота CD прямоугольного треугольника ABC делит гипотенузу AB на отрезки $AD = 9$ и $DB = 4$. Найдите CD.

7. Высота, опущенная на гипотенузу прямоугольного треугольника, делит его на два треугольника, площади которых равны соответственно 6 и 54. Найдите гипотенузу треугольника.

8. Высота прямоугольного треугольника, проведенная к его гипотенузе, делит биссектрису одного из острых углов на отрезки, отношение длин которых равно $3 + 2\sqrt{3}$, считая от вершины. Найти величины острых углов треугольника.

9. В прямоугольном треугольнике ABC угол C – прямой, CD – высота, опущенная на гипотенузу. Радиусы окружностей, вписанных в треугольники ACD и BCD, равны 3 и 4. Найти гипотенузу AB треугольника ABC.

10. Треугольник ABC не имеет тупых углов. На стороне AC этого треугольника взята точка D так, что $AD = \frac{3}{4}AC$. Найти угол BAC, если известно, что прямая BD разбивает треугольник ABC на два подобных треугольника.

11. Доказать, что высоты остроугольного треугольника являются биссектрисами треугольника, образованного отрезками, соединяющими основания высот.

12. В остроугольном треугольнике ABC угол BAC равен α. На стороне BC, как на диаметре, построена окружность. Эта окружность пересекает сторону AC в точке P, а сторону AB в точке Q. Найти отношение площади треугольника APQ к площади треугольника ABC.

13. В остроугольном треугольнике ABC проведены высоты CH и AH_1. Известно, что $AC = 2$, площадь круга, описанного около треугольника HBH_1, равна $\frac{\pi}{3}$. Найти угол между высотой CH и стороной BC.

14. В прямоугольном треугольнике ABC (угол C прямой) длина катета BC равна 2 см. В угол ABC вписана окружность радиуса $\sqrt{2}$ см так, что она касается прямой BC в точке C. Найти радиус окружности, вписанной в треугольник ABC.

15. В треугольнике ABC на стороне AC взята точка H так, что длина отрезка BH равна 3, длина отрезка HC равна 2, а сумма углов ABC и AHB равна π. Найти периметр треугольника ABH, если косинус угла ACB равен $\frac{11}{16}$.

16. В остроугольном треугольнике ABC опущены высоты AP и CK. Известно, что площадь треугольника ABC равна 18, площадь треугольника BPK равна 2, а длина отрезка PK равна $2\sqrt{2}$. Вычислить радиус окружности, описанной вокруг треугольника ABC.

17. Через точку, взятую на стороне треугольника, проведены две прямые, параллельные двум другим сторонам. Эти прямые разбивают данный треугольник на три части – один параллелограмм и два треугольника; площади треугольников равны S_1 и S_2. Найти площадь параллелограмма.

18. Через точку, взятую внутри треугольника, проведены три прямые, параллельные его сторонам. Эти прямые разбивают треугольник на шесть частей, три из которых – треугольники с площадями S_1, S_2, S_3. Найти площадь треугольника.

1.5. Площади

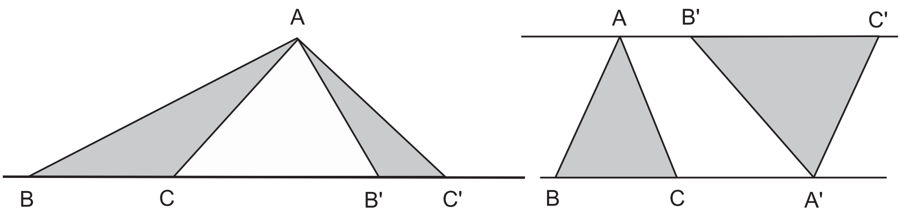
Теоретический материал

При решении задач этого раздела необходимо помнить формулы площади треугольника:

$$S = \frac{1}{2}ab\sin\gamma, \quad S = \frac{1}{2}ah_a, \quad S = \frac{abc}{4R}, \quad S = \sqrt{p(p-a)(p-b)(p-c)}, \quad S = pr.$$

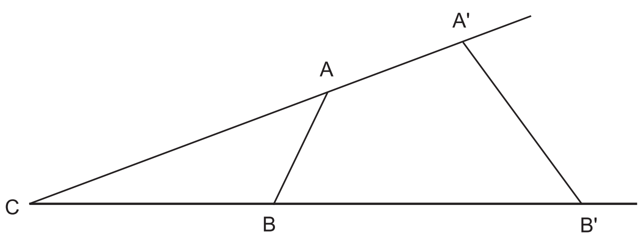
Следствия из формулы $S = \dfrac{1}{2} a h_a$.

- Площади треугольников с общим основанием относятся, как высоты, проведенные к этому основанию.
- Отношение площадей треугольников с общей вершиной и основаниями, лежащими на одной прямой (левый рисунок), равно отношению длин этих оснований:
$$\frac{S_{\Delta ABC}}{S_{\Delta AB'C'}} = \frac{BC}{B'C'}.$$
- Отношение площадей двух треугольников с вершинами, лежащими на двух параллельных прямых (правый рисунок), равно отношению длин параллельных сторон:
$$\frac{S_{\Delta ABC}}{S_{\Delta A'B'C'}} = \frac{BC}{B'C'}.$$



Следствие из формулы $S = \dfrac{1}{2} ab \sin\gamma$.

Площади треугольников с общим (или равным) углом при вершине относятся, как произведение отношений соответствующих сторон:
$$\frac{S_{\Delta ABC}}{S_{\Delta A'B'C}} = \frac{CA}{CA'} \cdot \frac{CB}{CB'}.$$

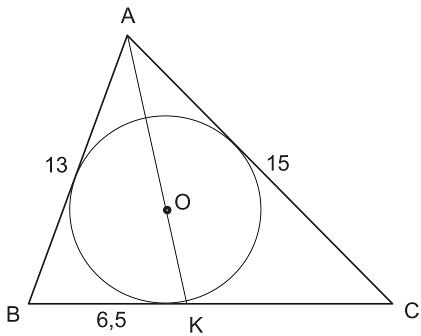


Напомним также утверждения, справедливые для произвольных фигур на плоскости:

- равные фигуры имеют равные площади;
- отношение площадей подобных фигур равно квадрату коэффициента подобия этих фигур.

Примеры решения задач

П р и м е р 1. В треугольник ABC вписана окружность с центром в точке O. Луч AO пересекает сторону BC в точке K. Найдите площадь треугольника ABC, если $AB = 13$, $AC = 15$, $BK = 6,5$.



Р е ш е н и е. Найдём отрезок KC и вычислим площадь по формуле Герона. Так как центр вписанной окружности есть точка пересечения биссектрис, то отрезок AK является биссектрисой ΔABC и по свойству биссектрисы

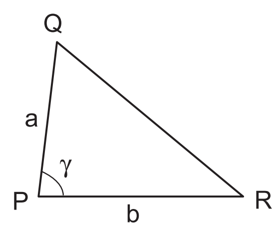
$$\frac{AB}{BK} = \frac{AC}{KC} \implies KC = 7,5 \implies BC = 14.$$

Теперь площадь ΔABC можно вычислить по формуле Герона:

$$S = \sqrt{p(p-a)(p-b)(p-c)} = 84.$$

О т в е т. 84.

П р и м е р 2. В треугольнике PQR длина стороны PQ не больше, чем 9, а длина стороны PR не больше, чем 12. Площадь треугольника не меньше, чем 54. Найти длину его медианы, проведенной из вершины P.



Р е ш е н и е. Пусть $PQ = a$, $PR = b$, $\angle QPR = \gamma$. Тогда

$$S_{\Delta PQR} = \frac{1}{2}ab\sin\gamma.$$

Так как $\sin\gamma \leq 1$, $a \leq 9$, $b \leq 12$, то

$$S_{\Delta PQR} \leq \frac{1}{2} \cdot 9 \cdot 12 \cdot 1 = 54.$$

Но по условию задачи $S_{\Delta PQR} \geq 54$, следовательно, $S_{\Delta PQR} = 54$. Это возможно только в случае, когда $a = 9$, $b = 12$ и $\sin\gamma = 1$. Значит, $\gamma = 90^\circ$, гипотенуза $QP = \sqrt{a^2 + b^2} = 15$, а медиана, проведённая к гипотенузе, равна $QP/2 = 15/2$.

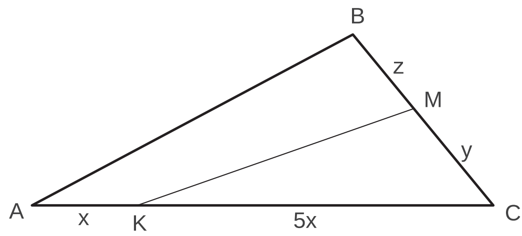
О т в е т. $\dfrac{15}{2}$.

П р и м е р 3. В треугольнике ABC на стороне AC взята точка K, а на стороне BC – точка M так, что $S_{KMC} : S_{AKMB} = 5 : 6$, $\dfrac{CK}{KA} = 5$. Найти $\dfrac{CM}{MB}$.

Р е ш е н и е. Пусть $AK = x$, $CM = y$, $MB = z$, тогда $CK = 5x$.

Если мы будем знать отношение площадей треугольников KMC и ABC, то сможем найти искомое отношение $y : z$ из равенства

$$\frac{S_{\Delta ABC}}{S_{\Delta KMC}} = \frac{\frac{1}{2}\cdot(x+5x)(y+z)\sin\angle C}{\frac{1}{2}\cdot 5xy\sin\angle C} = \frac{6(y+z)}{5y}.$$



Отношение площадей треугольников ABC и KMC получим следующим образом:

$$\frac{S_{\Delta ABC}}{S_{\Delta KMC}} = \frac{S_{\Delta KMC}+S_{AKMB}}{S_{\Delta KMC}} = 1+\frac{6}{5} = \frac{11}{5}.$$

Следовательно,

$$\frac{6(y+z)}{5y} = \frac{11}{5} \quad\Longleftrightarrow\quad 5y = 6z \quad\Longleftrightarrow\quad y : z = 6 : 5.$$

Ответ. $6 : 5$.

Задачи

1. Найдите диаметр окружности, вписанной в треугольник со сторонами 20, 20, 24.

2. Найдите радиус окружности, описанной около треугольника со сторонами 4, 13, 15.

3. Найти отношение площадей треугольника и четырёхугольника, на которые делится треугольник своей средней линией.

4. Стороны треугольника ABC разделены пополам точками D, E и F соответственно. Во сколько раз площадь треугольника DEF меньше площади треугольника ABC?

5. Прямая, параллельная основанию треугольника, делит его на две равновеликие части. В каком отношении эта прямая делит боковые стороны треугольника?

6. Стороны первого треугольника равны 6, 9 и 12. Произведение длин сторон подобного ему треугольника равно 24. Найти отношение площади первого треугольника к площади второго.

7. Дан треугольник ABC, величина угла между AB и AC равна $\pi/3$. Во сколько раз изменится площадь треугольника, если этот угол увеличится в два раза (длины сторон, образующих данный угол, фиксированы)?

8. Стороны треугольника равны 13, 14 и 15. Найдите большую высоту треугольника. Ответ округлите до целых.

9. Площадь треугольника ABC равна 8. Точка D лежит на стороне AC, а точка E – на стороне AB. Известно, что $AE = BE$, $AD = 3DC$. Найти площадь треугольника BDE.

10. В треугольнике ABC точка D лежит на стороне AC, а точка E – на стороне AB. Известно, что $AE = 3BE$, $AD = 2DC$. Найти отношение площадей треугольников BDE и ABC.

11. Биссектрисы BE и AD треугольника ABC пересекаются в точке Q. Найти площадь треугольника ABC, если известно, что площадь треугольника BQD равна 1 и $2AC = 3AB$, $3BC = 4AB$.

12. В треугольнике ABC биссектриса AK перпендикулярна медиане BM, а угол ABC равен $120°$. Найти отношение площади треугольника ABC к площади описанного около этого треугольника круга.

13. В прямоугольном треугольнике ABC точки D и E лежат соответственно на катетах BC и AC так, что $CD = CE = 1$. Точка O есть точка пересечения отрезков AD и BE. Площадь треугольника AOE меньше площади треугольника BOD на $1/2$. Кроме того, известно, что $BE = \sqrt{17}$. Найти площадь треугольника ABC.

14. Медианы BK и CL треугольника ABC пересекаются в точке M под прямым углом, $AC = b$, $AB = c$. Найти площадь четырёхугольника $AKML$.

15. В треугольнике ABC длина стороны BC равна 15, а длина высоты BD равна 5. На стороне AB взята точка P так, что длины отрезков AP и PB равны соответственно 5,8 и 7,2. Найти площадь S треугольника BPC, если известно, что $S > 3$.

16. В треугольнике ABC медиана AK пересекает медиану BD в точке L. Найти площадь треугольника ABC, если площадь четырёхугольника $KCDL$ равна 5.

17. В треугольнике ABC $AB = 6$, $BC = 9$, $AC = 10$. Биссектриса угла B пересекает сторону AC в точке M. На отрезке BM взята точка O так, что $BO : OM = 3 : 1$. Площадь какого из треугольников ABO, BCO или ACO является наименьшей?

18. Прямая, проходящая через вершину основания равнобедренного треугольника, делит его площадь пополам, а периметр треугольника делит на части 5 и 7. Найдите площадь треугольника и укажите, где лежит центр описанной окружности: внутри или вне треугольника?

19. В треугольнике ABC известны длины всех высот: $h_a = 1/3$, $h_b = 1/4$, $h_c = 1/5$. Найти отношение длины биссектрисы CD к радиусу описанной окружности.

2. Окружности

2.1. Углы в окружностях. Касание окружности и прямой

Теоретический материал

При решении задач, связанных с окружностями, необходимо помнить следующие факты и утверждения.

Теорема о вписанном угле. Вписанный угол измеряется половиной дуги окружности, на которую он опирается.

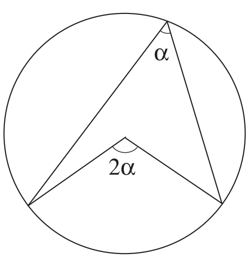
З а м е ч а н и е. Так как дуга измеряется величиной соответствующего центрального угла, то вписанный угол равен половине центрального угла, опирающегося на ту же дугу.

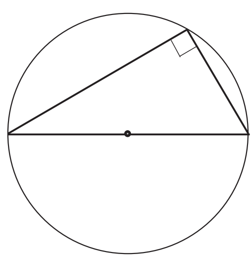
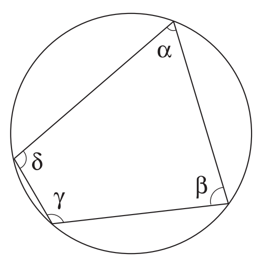
Следствие 1. Вписанные углы, опирающиеся на одну и ту же дугу (или на равные дуги), равны.

Следствие 2. Вписанный угол, опирающийся на диаметр окружности, является прямым.

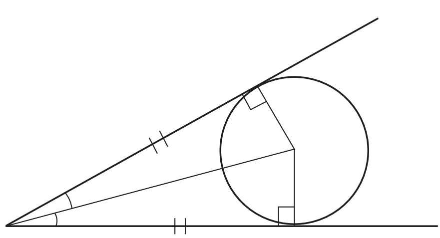
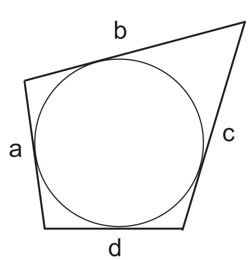
Следствие 3. Сумма противолежащих углов вписанного в окружность четырехугольника равна 180°:

$$\alpha + \gamma = \beta + \delta = 180^\circ.$$



Теорема о касательных. Касательная к окружности перпендикулярна радиусу, проведенному в точку касания. Отрезки касательных, проведенных из одной точки к одной окружности, равны и составляют равные углы с прямой, проходящей через эту точку и центр окружности.

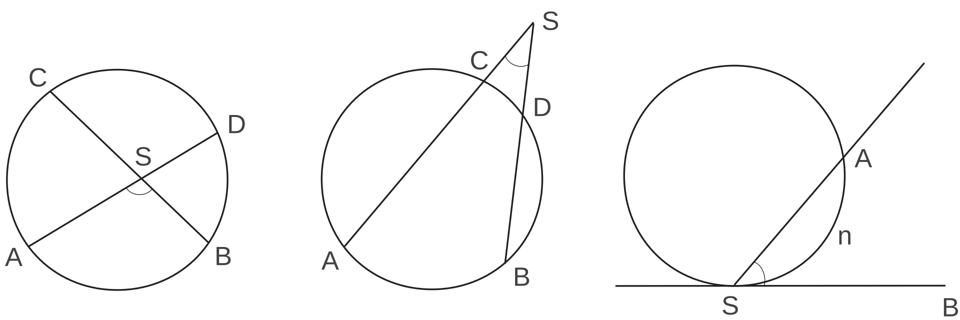



Следствие. В любом описанном около окружности четырехугольнике суммы длин противоположных сторон равны:

$$a + c = b + d.$$

Также полезными могут оказаться следующие утверждения об углах в окружностях.

- *Угол между хордами* равен полусумме мер дуг окружности, которые отсекают на окружности эти хорды (левый рисунок):
$$\angle ASB = \frac{\smile AB + \smile CD}{2}.$$
- *Угол между секущими*, выходящими из одной точки, равен полуразности мер дуг окружности, заключенных между ними (центральный рисунок):
$$\angle ASB = \frac{\smile AB - \smile CD}{2}.$$
- *Угол между хордой и касательной* измеряется половиной меры заключенной внутри него дуги окружности (правый рисунок):
$$\angle ASB = \frac{\smile AnB}{2}.$$



Примеры решения задач

Пример 1. В равнобедренный треугольник ABC вписана окружность. Параллельно его основанию AC проведена касательная к окружности, пересекающая боковые стороны в точках D и E. Найти радиус окружности, если $DE = 8$, $AC = 18$.

Решение. Опустим из точек D и E перпендикуляры на сторону AC – получим прямоугольник $DEMK$, в котором $KM = DE = 8$.

Диаметр окружности равен перпендикуляру DK, для вычисления длины которого сначала надо найти длину отрезка AD.

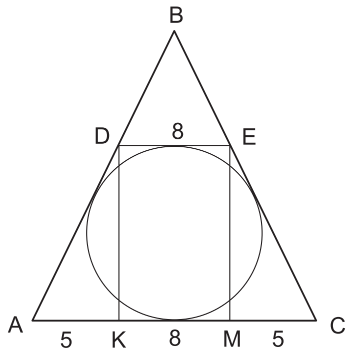
Рассмотрим прямоугольные треугольники ADK и CEM. Они равны по катету ($DK = EM$) и острому углу ($\angle A = \angle C$, так как ΔABC равнобедренный). Из равенства треугольников следует равенство отрезков

$$AK = MC = 5.$$

Так как в описанном около окружности четырехугольнике суммы длин противоположных сторон равны, то

$$AD + EC = DE + AC = 8 + 18 = 26 \implies$$

$$\implies AD = EC = \frac{26}{2} = 13.$$



Диаметр окружности равен

$$DK = \sqrt{AD^2 - AK^2} = \sqrt{13^2 - 5^2} = 12,$$

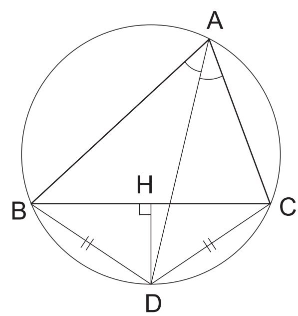
Следовательно, радиус равен $12/2 = 6$.

Ответ. 6.

Пример 2. Доказать, что если из вершины A неравнобедренного треугольника ABC ($AB \neq AC$) проведена биссектриса, а из середины BC восстановлен перпендикуляр, то точка их пересечения лежит на окружности, описанной вокруг треугольника ABC.

Решение. Пусть D – точка пересечения биссектрисы угла BAC треугольника ABC с описанной окружностью.

Из равенства углов BAD и CAD следует равенство хорд $BD = CD$, а из равнобедренности треугольника BDC следует то, что перпендикуляр, опущенный из точки D на отрезок BC делит его пополам.



Таким образом, мы получили, что серединный перпендикуляр к отрезку BC и биссектриса угла BAC пересекаются в точке D, лежащей на окружности, описанной вокруг треугольника ABC.

Пример 3. В треугольнике ABC проведены биссектрисы AD и BE, пересекающиеся в точке O. Известно, что отрезок OE имеет длину 1, а вершина C лежит на окружности, проходящей через точки E, D, O. Найти стороны и углы треугольника EDO.

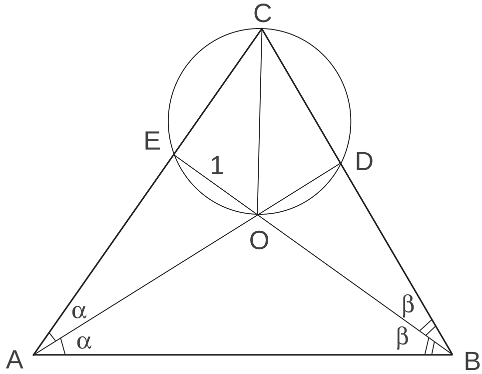
Решение. Пусть $\angle BAD = \angle DAC = \alpha$, $\angle ABE = \angle CBE = \beta$, тогда

$$\angle ACB = \pi - 2\alpha - 2\beta, \quad \angle DOE = \angle AOB = \pi - \alpha - \beta.$$

Так как вокруг четырехугольника $CEOD$ можно описать окружность, то

$$\angle ACB + \angle DOE = \pi \implies (\pi - 2\alpha - 2\beta) + (\pi - \alpha - \beta) = \pi \implies$$

$$\implies \alpha + \beta = \frac{\pi}{3} \implies \angle ACB = \frac{\pi}{3} \implies \angle DOE = \frac{2\pi}{3}.$$



Поскольку биссектрисы треугольника пересекаются в одной точке и O есть точка пересечения двух из них, прямая CO является третьей биссектрисой и

$$\angle ECO = \angle DCO = \frac{1}{2}\angle ACB = \frac{\pi}{6}.$$

В силу того, что равные вписанные углы опираются на равные хорды, $DO = EO = 1$. Следовательно, треугольник DOE равнобедренный и

$$\angle OED = \angle ODE = \frac{\pi - \angle DOE}{2} = \frac{\pi}{6}.$$

Последний элемент треугольника DOE можно найти с помощью теоремы косинусов. Получим $DE = \sqrt{3}$.

О т в е т. $EO = DO = 1$, $DE = \sqrt{3}$, $\angle DOE = \dfrac{2\pi}{3}$, $\angle OED = \angle ODE = \dfrac{\pi}{6}$.

Задачи

1. В окружности радиуса 26 проведена хорда, равная 48. Найти длину отрезка, соединяющего середину хорды с центром окружности.

2. В угол величиной 60° вписана окружность. Найти расстояние от центра окружности до вершины угла, если радиус окружности равен 7,5.

3. В окружности с центром в точке O проведена хорда AB и радиус OD, которые пересекаются в точке C, причем известно, что $AB \perp OD$, $OC = 9$, $CD = 32$. Найти хорду.

4. В окружности перпендикулярно диаметру AB проведена хорда CD. Точка их пересечения делит диаметр на отрезки 18 и 32. Найти длину хорды CD.

5. Найти угол между хордой AB и диаметром BC, если хорда AB стягивает дугу в 54°.

6. Из точки A окружности проведены диаметр AB и хорда AC, которая продолжена за C на расстояние CK, равное AC. Найти BK, если радиус окружности равен 4.

7. Определить острые углы прямоугольного треугольника, зная, что радиус описанного около него круга относится к радиусу вписанного круга как 5:2.
8. Общая хорда двух пересекающихся окружностей видна из их центров под углами 90° и 120°. Найти расстояние между центрами окружностей, если длина хорды равна $\dfrac{3+\sqrt{3}}{4}$.
9. Докажите, что в прямоугольном треугольнике сумма длин катетов равна сумме длин диаметров вписанной и описанной окружностей.
10. KD и MC – хорды одной окружности, причем E – точка их пересечения. Найдите угол CDE, если угол DEM в 4 раза больше угла DEC, а угол CMK на 26° больше угла DEC.
11. Найдите углы треугольника, в котором центры вписанной и описанной окружностей симметричны относительно одной из сторон треугольника.
12. Через вершины вписанного в окружность треугольника проведены касательные к этой окружности. Определить углы треугольника, образованного этими касательными, через углы вписанного треугольника.
13. Окружность проходит через вершины B, C и D трапеции $ABCD$ и касается стороны AB в точке B. Найти длину диагонали BD, если длины оснований трапеции равны a и b.
14. Точка касания окружности, вписанной в прямоугольный треугольник, разбивает один из его катетов на отрезки длины m и n, причем $m < n$. Найти длину другого катета.
15. Через точки пересечения двух окружностей P и P' проведены прямые AB и CD (точки A и D лежат на первой окружности, точки B и C – на второй). Через точки A и D проведена прямая m, а через B и C – прямая m'. Доказать, что m параллельна m'.
16. К двум не пересекающимся окружностям проведены две внешние касательные и внутренняя. Точки M и N – точки касания внешней касательной с окружностями, а P и Q – точки пересечения внутренней касательной с внешними. Доказать, что $MN = PQ$.
17. Может ли у треугольника со сторонами меньше 1 радиус описанной окружности быть больше 100?

2.2. Свойства касательных, хорд, секущих

Теоретический материал

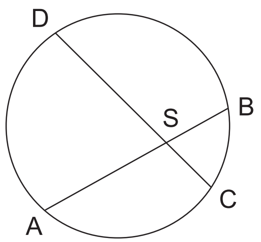
При решении задач этого раздела потребуется знание двух следующих теорем.

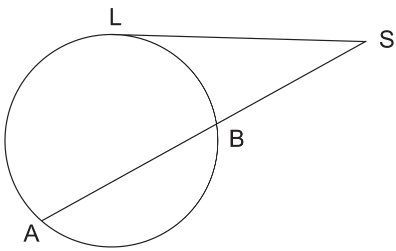
Теорема о касательной и секущей. Квадрат длины отрезка касательной равен произведению длины отрезка секущей на длину ее внешней части (правый рисунок):

$$SL^2 = SA \cdot SB.$$

Теорема о хордах. Произведения длин отрезков двух пересекающихся хорд равны (левый рисунок):

$$AS \cdot SB = CS \cdot SD.$$

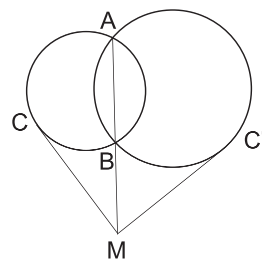




Следствие. Произведение длины отрезка секущей на длину ее внешней части есть величина постоянная для всех секущих, проведенных из одной точки к данной окружности.

Примеры решения задач

Пример 1. Доказать, что касательные к двум пересекающимся окружностям, проведенные из любой точки продолжения их общей хорды, равны между собой.

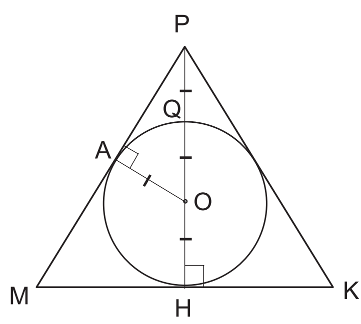


Решение. Пусть окружности пересекаются в точках A и B. Рассмотрим произвольную точку M на прямой AB и проведем касательные MC и MC'. Так как квадрат длины отрезка касательной равен произведению длины отрезка секущей на длину ее внешней части, то

$$MC^2 = MA \cdot MB \quad \text{и} \quad MC'^2 = MA \cdot MB,$$

следовательно, $MC = MC'$, что и требовалось доказать.

Пример 2. В равнобедренный треугольник PMK с основанием MK вписана окружность с радиусом $2\sqrt{3}$. Высота PH делится точкой пересечения с окружностью в отношении $1:2$, считая от вершины P. Найдите периметр треугольника PMK.



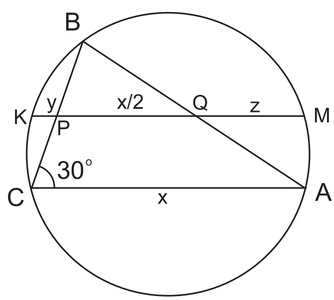
Решение. Обозначим точку пересечения высоты с окружностью через Q. Поскольку треугольник PMK равнобедренный, центр вписанной окружности O лежит на высоте PH и отрезок QH является диаметром, то есть равен $2r$. По условию задачи $QH = 2PQ$, значит $PQ = r$.

Пусть вписанная окружность касается стороны MP в точке A. Тогда в прямоугольном треугольнике APO катет $AO = r$, гипотенуза $PO = 2r$, откуда $\sin\angle APO = 1/2$ и $\angle APO = 30^\circ$. Следовательно, $\angle MPK = 2\angle APO = 60^\circ$ и треугольник PMK является равносторонним. Его периметр равен

$$P_{\Delta PMK} = 3MP = 6AP = 6r\operatorname{ctg}30^\circ = 36.$$

Ответ. 36.

Пример 3. Треугольник ABC со стороной $BC = 4$ и углом C, равным 30° вписан в окружность, радиуса 6. Найти среднюю линию этого треугольника, параллельную AC, и расстояние между точками, в которых ее продолжение пересекает окружность.



Решение. Поскольку средняя линия треугольника равна половине соответствующей стороны, надо найти сторону AC. Для её нахождения нам достаточно знать AB. Найдём сторону AB по теореме синусов:

$$\frac{AB}{\sin 30^\circ} = 2R \quad\Longrightarrow\quad AB = 6.$$

Теперь найдем $x = AC$ с помощью теоремы косинусов:

$$6^2 = 4^2 + x^2 - 2\cdot 4\cdot x\cdot\cos 30^\circ \quad\Longleftrightarrow\quad x = 2\sqrt{3}\pm 4\sqrt{2}.$$

Нам подходит только положительное значение $x = 2\sqrt{3} + 4\sqrt{2}$. Следовательно, средняя линия $PQ = x/2 = \sqrt{3} + 2\sqrt{2}$.

Пусть прямая, содержащая среднюю линию, пересекает окружность в точках K и M. Обозначим $y = KP$, $z = QM$ и запишем соотношение для пересекающихся хорд BC и KM:

$$BP\cdot PC = KP\cdot PM \quad\Longleftrightarrow\quad 2^2 = y\left(\frac{x}{2} + z\right).$$

Аналогично для хорд AB и KM:

$$AQ\cdot QB = MQ\cdot QK \quad\Longleftrightarrow\quad 3^2 = z\left(\frac{x}{2} + y\right).$$

В результате получаем систему

$$\begin{cases} 4 = y\cdot\dfrac{x}{2} + yz,\\[2mm] 9 = z\cdot\dfrac{x}{2} + yz. \end{cases}$$

Вычтем первое уравнение из второго и выразим z через y:

$$5 = \frac{x}{2}(z - y) \quad\Longleftrightarrow\quad z = y + \frac{10}{x}.$$

Подставим выражение для z в первое уравнение системы:

$$4 = y \cdot \frac{x}{2} + y\left(y + \frac{10}{x}\right) \iff y^2 + 2y\left(\frac{x}{4} + \frac{5}{x}\right) - 4 = 0.$$

Так как $x = 2\sqrt{3} + 4\sqrt{2}$ и $\frac{1}{x} = \frac{2\sqrt{2} - \sqrt{3}}{10}$, то $\frac{x}{4} + \frac{5}{x} = 2\sqrt{2}$.
Следовательно, $y^2 + 4\sqrt{2}y - 4 = 0$ и $y = -2\sqrt{2} + 2\sqrt{3}$.
В результате, $z = \sqrt{3}$ и $KM = 4\sqrt{3}$.

Ответ. $\sqrt{3} + 2\sqrt{2}$; $4\sqrt{3}$.

Задачи

1. (Теорема о хордах.) Доказать, что произведения длин отрезков двух пересекающихся хорд равны.

2. (Теорема о касательной и секущей.) Доказать, что квадрат длины отрезка касательной равен произведению длины отрезка секущей на длину ее внешней части.

3. KM и CD – хорды одной окружности, причем E – точка их пересечения. Найдите KM, если $CE = 6, ED = 8$ и KE на 8 меньше EM.

4. BD и CE – хорды одной окружности, причем A – точка их пересечения. Найдите BD, если $AC = 6, AE = 12$ и AB на 1 меньше AD.

5. Прямая CK пересекает окружность в точках P и K, а прямая CM – в точках D и M. Найдите DM, если $CK = 16, CP = 6$ и $CM = 24$.

6. Прямая AC пересекает окружность в точках D и C, а прямая AB – касательная к окружности, B – точка касания. Найдите AD, если $AB = 6$, $CD = 5$.

7. AC и BD – хорды одной окружности, причем K – точка их пересечения. Найдите P_{CKD}, если $KB = 12, KC = 30$ и $P_{AKB} = 28$.

8. Радиус круга равен 5. Внутри круга взята точка P на расстоянии 4 от его центра O. Через точку P проведена хорда $AB = 8$. На какие части делится хорда точкой P?

9. Около треугольника ABC описана окружность. Медиана треугольника AM продлена до пересечения с окружностью в точке K. Найдите сторону AC, если $AM = 18$, $MK = 8$, $BK = 10$.

10. Из внешней точки проведены к окружности секущая длиной 12 и касательная, длина которой составляет $2/3$ внутреннего отрезка секущей. Определить длину касательной.

11. Четырехугольник $ABCD$ с взаимно перпендикулярными диагоналями AC и BD вписан в окружность. Найти ее радиус, если $AB = 4$, $CD = 2$.

12. Четырехугольник $ABCD$ вписан в окружность. Известно, что $AB = 9$, $CD = 4$, $AC = 7$ и $BD = 8$. Найти площадь четырехугольника $ABCD$.

13. Окружность проходит через вершины A и C треугольника ABC, пересекает сторону AB в точке E и сторону BC в точке F. Угол AEC в 5 раз больше угла BAF, $\angle ABC = 72^\circ$. Найти радиус окружности, если $AC = 6$.

14. Через точку K, находящуюся вне окружности радиуса 4, проведена прямая, пересекающая окружность в точках L и M. Найти расстояние от точки K до центра окружности, если известно, что $KL = 4$, $KM = 5$.

15. Четырехугольник $ABCD$ вписан в окружность. Продолжение стороны AB за точку B пересекается с продолжением стороны CD в точке E. Найти угол ADE, если $CE = 2BE$, $AB : EC = 7 : 2$ и косинус угла AED равен $7/8$.

16. В окружности проведены равные пересекающиеся хорды. Доказать, что соответствующие части этих хорд, на которые они делятся точкой пересечения, равны.

17. Доказать, что расстояние от точки окружности до хорды круга есть среднее пропорциональное между расстояниями от концов хорды до касательной к окружности в этой точке.

2.3. Смешанные задачи

Теоретический материал

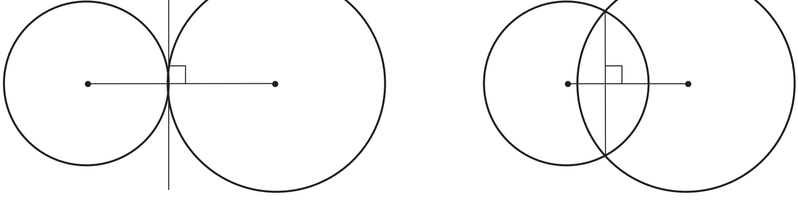
В этом разделе собраны задачи на использование приведенных ранее методов и задачи, связанные с формулами длины окружности и площади круга:

$$l = 2\pi R, \quad S = \pi R^2.$$

Кроме того, в раздел включены задачи с несколькими окружностями.

Напомним основные факты, связанные с взаимным расположением окружностей.

- Точка касания двух окружностей лежит на линии центров этих окружностей.
- Общая касательная, проходящая через точку касания двух окружностей, перпендикулярна линии центров (левый рисунок).
- Общая хорда двух пересекающихся окружностей перпендикулярна линии центров (правый рисунок).

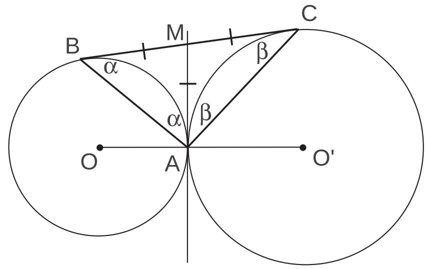


З а м е ч а н и е. Если в задаче сказано, что две окружности касаются друг друга, то, вообще говоря, возможны два случая касания – внутреннее и внешнее.

Примеры решения задач

Пример 1. К двум окружностям с центрами O и O', касающимся внешним образом в точке A, проведена общая касательная BC (B и C – точки касания). Доказать, что угол BAC – прямой.

Решение. Проведем через точку A прямую, перпендикулярную линии центров OO', она будет общей касательной к окружностям. Обозначим точку ее пересечения с отрезком BC через M.



Получим, что $BM = AM$ (как отрезки касательных к окружности с центром O) и $CM = AM$ (как отрезки касательных к окружности с центром O'). Следовательно, в треугольнике ABC медиана AM равна половине стороны BC. Покажем, что угол BAC – прямой.

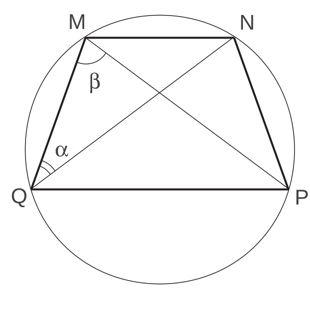
В равнобедренных треугольниках ABM и ACM обозначим

$$\alpha = \angle MAB = \angle ABM, \quad \beta = \angle MAC = \angle ACM,$$

тогда в треугольнике ABC сумма углов равна $2\alpha + 2\beta = 180^\circ$, следовательно, $\angle BAC = \alpha + \beta = 90^\circ$.

Замечание. В процессе решения задачи мы доказали ещё один полезный факт: если медиана равна половине стороны, к которой она проведена, то треугольник прямоугольный.

Пример 2. Трапеция $MNPQ$ вписана в окружность. Найдите среднюю линию трапеции, если ее меньшее основание $MN = 24$, $\sin\angle MQN = 0,2$ и $\cos\angle PMQ = 0,6$.



Решение. Для того, чтобы найти среднюю линию трапеции, надо найти основание PQ, а для того, чтобы найти PQ, надо узнать радиус окружности. Обозначим $\alpha = \angle MQN$, $\beta = \angle PMQ$ и применим теорему синусов к ΔMNQ:

$$\frac{24}{\sin\alpha} = 2R \quad \Longrightarrow \quad R = 60.$$

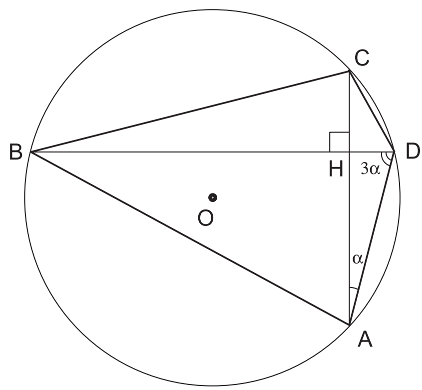
Теперь применим теорему синусов к ΔMPQ:

$$\frac{PQ}{\sin\beta} = 2R \quad \Longrightarrow \quad PQ = 2R\cdot\sqrt{1-\cos^2\beta} = 96.$$

В результате средняя линия равна $\dfrac{MN+PQ}{2} = 60$.

Ответ. 60.

Пример 3. В окружность с центром в точке O вписан четырехугольник $ABCD$, диагонали которого перпендикулярны. Известно, что $\angle AOB = 3\angle COD$. Найти площадь круга и сравнить с числом 510, если $CD = 10$.



Решение. Так как треугольник ACD вписан в окружность и длина стороны CD известна, то для нахождения радиуса окружности надо найти величину угла DAC. Пусть диагонали четырехугольника $ABCD$ пересекаются в точке H и $\angle DAC = \alpha$. Так как вписанный угол равен половине центрального, а соответствующий центральный в три раза больше, то угол $ADB = 3\alpha$. Из прямоугольного треугольника ADH получаем $\alpha + 3\alpha = 90° \iff \alpha = 45°/2$. Теперь с помощью теоремы синусов из треугольника ADC определим радиус окружности:

$$\frac{10}{\sin\alpha} = 2R \quad \iff \quad R = \frac{5}{\sin\frac{\pi}{8}}.$$

Следовательно, для искомой площади круга получаем

$$S = \pi R^2 = \frac{25\pi}{\sin^2\frac{\pi}{8}} = \frac{50\pi}{1-\cos\frac{\pi}{4}} = 50\pi\cdot(2+\sqrt{2}) > 50\cdot 3\cdot(2+1,4) = 510.$$

Ответ. $S = 50\pi\cdot(2+\sqrt{2}) > 510$.

Задачи

1. Около окружности диаметром 15 описана равнобедренная трапеция с боковой стороной, равной 17. Найдите длину большего основания трапеции.

2. Из точки A, лежащей на окружности, проведены две хорды, равные 7 и 15. Найдите диаметр окружности, если расстояние между серединами хорд равно 10.

3. Две окружности, вписанные в угол $60°$, касаются друг друга внешним образом. Найти расстояние от точки касания окружностей до стороны угла, если если радиус большей окружности равен 23.

4. В окружности, радиус которой равен 11, проведены хорды AB и AC. Угол между ними равен $30°$. Найти расстояние между точками B и C.

5. В окружности по разные стороны от центра проведены параллельные хорды длиной 12 и 16. Расстояние между ними равно 14. Найти радиус окружности.

6. Общей хордой двух кругов стягиваются дуги в $60°$ и $120°$. Найти отношение площадей этих кругов.

7. В полукруг помещен круг, касающийся дуги полукруга в ее середине, а также диаметра полукруга. Найдите отношение площадей данного полукруга и данного круга.

8. Определить радиус окружности, если вписанный в нее угол со сторонами, длины которых равны 1 и 2, опирается на дугу 120°.

9. Окружности радиусов r и R касаются внешним образом. Найдите длину их общей внешней касательной.

10. В угол, величина которого равна α, вписаны две окружности, касающиеся друг друга и сторон угла. Определить отношение большего радиуса к меньшему.

11. В круг вписаны две трапеции с соответственно параллельными сторонами. Докажите, что диагонали этих трапеций равны.

12. Вычислите площадь равнобедренной трапеции, если ее высота равна h, а боковая сторона видна из центра описанной окружности под углом α.

13. В окружности диаметра 4 проведены диаметр AB и хорда CD, пересекающиеся в точке E. Известно, что $\angle ABC = 60^\circ$, $\angle BCE = 8^\circ$. Найти длину CE.

14. В треугольнике ABC $\angle B = \dfrac{\pi}{6}$. Через точки A и B проведена окружность радиуса 2, касающаяся прямой AC в точке A. Через точки B и C проведена окружность радиуса 3, касающаяся прямой AC в точке C. Найти длину стороны AC.

15. AM – биссектриса треугольника ABC, $BM = 2$, $CM = 3$, D – точка пересечения AM с окружностью, описанной около данного треугольника, $MD = 2$. Найти AB.

16. Окружности радиусов 2 и 3 внешним образом касаются друг друга в точке A. Их общая касательная, проходящая через точку A, пересекает две другие их общие касательные в точках B и C. Найти BC.

17. Две окружности касаются друг друга внешним образом в точке C. Радиусы окружностей равны 2 и 7. Общая касательная к обеим окружностям, проведенная через точку C, пересекается с другой их общей касательной в точке D. Найти расстояние от центра меньшей окружности до точки D.

18. В треугольнике ABC даны длины сторон $AB = \sqrt{2}$, $BC = \sqrt{5}$ и $AC = 3$. Сравните величину угла BOC и $112,5^\circ$, если O – центр вписанной в треугольник ABC окружности.

19. Найти радиус окружности, которая касается двух окружностей, касающихся друг друга внешним образом, радиусов r и R и отрезка их общей касательной.

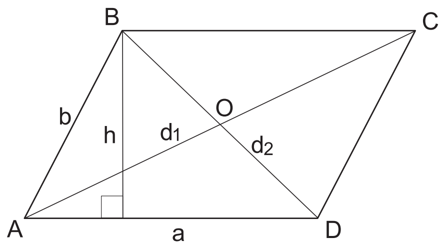
20. $ABCD$ – трапеция. Радиусы окружностей, описанных около треугольников ABC, BCD и ACD, равны R_1, R_2 и R_3 соответственно. Найдите радиус окружности, описанной около треугольника ABD.

3. Многоугольники

3.1. Параллелограммы

Теоретический материал

Параллелограммом называется четырехугольник, противолежащие стороны которого попарно параллельны.



У параллелограмма

- противоположные стороны равны;
- противоположные углы равны;
- диагонали пересекаются и точкой пересечения делятся пополам;
- площадь равна: $S = ah = ab\sin\angle BAD = \frac{1}{2}d_1d_2\sin\angle AOB$;
- сумма квадратов диагоналей равна сумме квадратов сторон: $d_1^2 + d_2^2 = 2a^2 + 2b^2$.

Заметим, что параллелограмм является *выпуклым* четырехугольником, то есть лежит в одной полуплоскости относительно любой прямой, содержащей его сторону.

Признаки параллелограмма. Четырехугольник является параллелограммом, если выполнено хотя бы одно из следующих условий:

- противоположные стороны попарно равны;
- противоположные углы попарно равны;
- диагонали пересекаются и точкой пересечения делятся пополам;
- две противоположные стороны равны и параллельны.

Если один из углов параллелограмма прямой, то и все углы – прямые. Такой параллелограмм называется *прямоугольником*.

У прямоугольника

- диагонали равны;
- площадь равна произведению сторон: $S = ab$.

Если у параллелограмма все стороны равны, то такой параллелограмм называется *ромбом*.

У ромба

- диагонали перпендикулярны и являются биссектрисами соответствующих углов;
- площадь равна половине произведения диагоналей.

Квадратом называется параллелограмм с прямыми углами и равными сторонами. Так как квадрат есть частный случай прямоугольника и частный случай ромба, то он обладает всеми перечисленными выше свойствами.

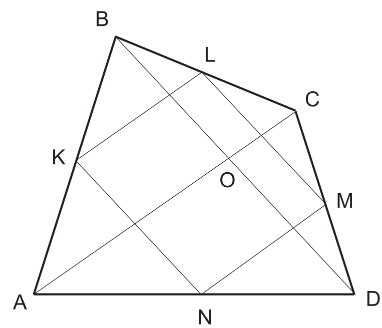
Примеры решения задач

Пример 1 (Теорема Вариньона). Доказать, что середины сторон выпуклого четырехугольника являются вершинами параллелограмма.

Решение. Пусть точки K, L, M и N середины сторон AB, BC, CD и AD четырехугольника $ABCD$. Так как отрезок KL является средней линией треугольника ABC, а отрезок MN – средней линией треугольника ADC, то

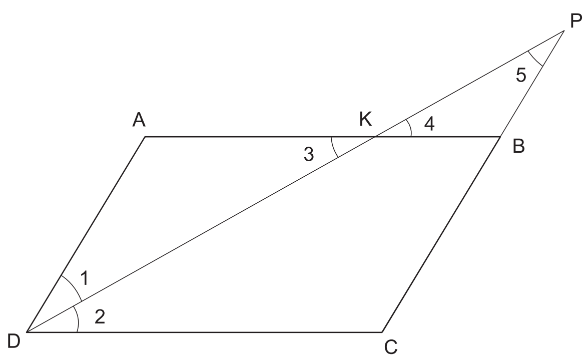
$$KL \parallel AC,\ KL = \frac{1}{2}AC,\ MN \parallel AC,\ MN = \frac{1}{2}AC,$$

следовательно, $KL \parallel MN$, $KL = MN$ и четырехугольник $KLMN$ является параллелограммом по одному из признаков параллелограмма.



Пример 2. В параллелограмме $ABCD$ биссектриса угла D пересекает сторону AB в точке K и прямую BC в точке P. Найдите периметр треугольника CDP, если $AK = 12$, $BK = 9$, $PK = 15$.

Решение. Заметим, что $\angle 1 = \angle 2 = \angle 3 = \angle 4 = \angle 5$:
$\angle 1 = \angle 2$ (по условию),
$\angle 2 = \angle 3$ (как накрест лежащие при параллельных прямых),
$\angle 3 = \angle 4$ (как вертикальные),
$\angle 5 = \angle 1$ (как накрест лежащие при параллельных прямых).



Следовательно, треугольники ΔKPB, ΔDPC и ΔAKD являются равнобедренными и подобными. Так как $DC = AB = 21$ и ΔCDP равнобедренный, то осталось найти только DK.

Из подобия $\Delta KPB \sim \Delta KDA$ получим

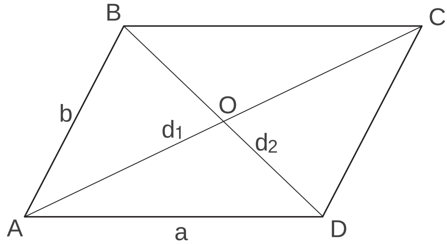
$$\frac{AK}{KB} = \frac{DK}{KP} \iff \frac{12}{9} = \frac{DK}{15} \iff DK = 20.$$

В результате $P_{\Delta CDP} = 21 + 35 + 21 = 77$.

Ответ. 77.

Пример 3. Доказать, что в параллелограмме сумма квадратов диагоналей равна сумме квадратов сторон.

Решение. Рассмотрим параллелограмм $ABCD$. Пусть его диагонали $AC = d_1$, $BD = d_2$, а стороны $AD = BC = a$, $AB = CD = b$.



Выразим длины диагоналей через длины сторон с помощью теоремы косинусов, примененной к треугольникам ABC и ABD:

$$\begin{cases} d_1^2 = a^2 + b^2 - 2ab \cdot \cos\angle ABC, \\ d_2^2 = a^2 + b^2 - 2ab \cdot \cos\angle BAD. \end{cases}$$

Сложив эти уравнения и, заметив, что $\cos\angle ABC = \cos(\pi - \angle BAD) = -\cos\angle BAD$, получим требуемое равенство

$$d_1^2 + d_2^2 = 2a^2 + 2b^2.$$

Задачи

1. В параллелограмме $ABCD$ диагонали пересекаются в точке O, причем $\angle COB = 126°$, $\angle CAD = 28°$, и длина отрезка BD вдвое больше стороны AB. Найдите угол D параллелограмма.

2. В прямоугольнике $MNPQ$ сторона MN в 6 раз меньше диагонали NQ. Диагонали прямоугольника пересекаются в точке E. Периметр треугольника NEM равен 35 см. Найдите диагональ MP.

3. Найдите площадь параллелограмма, если его меньшая диагональ перпендикулярна боковой стороне, и высота, проведенная из вершины тупого угла параллелограмма, делит большую сторону на отрезки 9 см и 25 см.

4. В параллелограмме $ABCD$ сторона $AD = 4\sqrt{2}$, $\angle ADB = 30°$, $\angle BDC = 45°$. Найдите длину стороны AB.

5. Найдите площадь параллелограмма $MPKN$, если $\angle PKM = 45°$, $PK = 5\sqrt{2}$, $PN = 26$.

6. В параллелограмме $ABCD$ диагональ $BD = a$, O – точка пересечения диагоналей. Найти площадь параллелограмма, если $\angle DBA = 45°$, а $\angle AOB = 105°$.

7. Найдите периметр параллелограмма $ABCD$, если $AD = 10$, $BD = 8$, а отрезок, соединяющий вершину B с серединой стороны AD, равен $\sqrt{15}$.

8. Дан ромб $ABCD$. Окружность, описанная около треугольника ABD, пересекает большую диагональ ромба AC в точке E. Найдите CE, если $AB = 8\sqrt{5}, BD = 16$.

9. Дан ромб $ABCD$ с острым углом B. Площадь ромба равна 320, а синус угла B равен 0,8. Высота CH пересекает диагональ BD в точке K. Найдите длину отрезка CK.

10. В параллелограмме $ABCD$ биссектриса угла B пересекает сторону CD в точке T и прямую AD в точке M. Найдите периметр треугольника CBT, если $AB = 21$, $BM = 35$, $MD = 9$.

11. В параллелограмме $ABCD$ биссектриса угла B пересекает сторону CD в точке T и прямую AD в точке M. Найдите периметр треугольника ABM, если $BC = 15$, $BT = 18$, $TM = 12$.

12. Доказать, что из всех прямоугольников с данной диагональю наибольшую площадь имеет квадрат.

13. Дан параллелограмм $ABCD$. Биссектриса угла A пересекает сторону BC в точке M, а биссектриса угла B пересекает сторону AD в точке K, причем $AM = 10$, $BK = 6$. Найдите площадь четырехугольника $ABMK$.

14. Расстояния от точки P, находящейся внутри прямоугольника, до трех его вершин равны соответственно a, b и c. Найдите расстояние от точки P до четвертой вершины прямоугольника.

15. Доказать, что если каждая из диагоналей выпуклого четырехугольника делит его на равновеликие треугольники, то этот четырехугольник – параллелограмм.

16. Точка C лежит на стороне MN ромба $KLMN$, причем $CN = 2CM$ и $\angle MNK = 120°$. Найти отношение $\cos\angle CKN : \cos\angle CLN$.

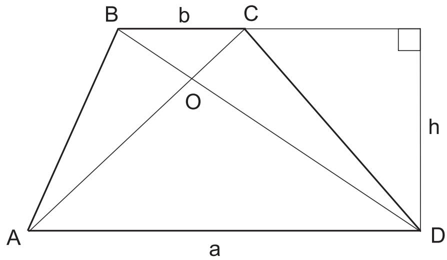
3.2. Трапеции

Теоретический материал

Трапецией называется четырехугольник, две противоположные стороны которого параллельны.

Отметим, что согласно этому определению, параллелограмм является частным случаем трапеции.

З а м е ч а н и е. В некоторых учебных пособиях под трапецией подразумевается четырехугольник, у которого две противоположные стороны параллельны, а две другие не параллельны.



Параллельные стороны называются *основаниями* трапеции, две другие – *боковыми сторонами.*

Если боковые стороны трапеции равны, но не параллельны, то она называется *равнобедренной* (или *равнобокой*).

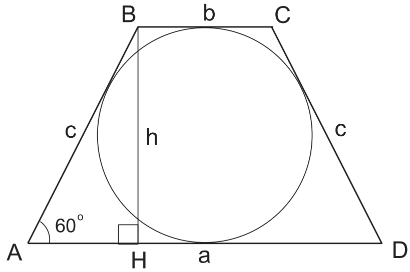
Напомним основные факты, связанные с трапециями.

- Средняя линия трапеции параллельна основаниям и равна их полусумме.
- Площадь трапеции равна $S = \frac{1}{2}(a+b)h$.
- У равнобедренной трапеции углы при основании равны и диагонали равны.
- Около трапеции можно описать окружность тогда и только тогда, когда она является равнобедренной.
- Диагонали трапеции делят ее на четыре треугольника, два из которых подобны ($\Delta AOD \sim \Delta COB$), а два других имеют одинаковую площадь ($S_{\Delta AOB} = S_{\Delta COD}$).

Примеры решения задач

Пример 1. В равнобедренную трапецию, один из углов которой равен 60°, а площадь равна $24\sqrt{3}$, вписана окружность. Найдите радиус этой окружности.

Решение. Пусть в трапеции $ABCD$ основания $AD = a$, $BC = b$, боковые стороны $AB = CD = c$. Опустим из вершины B высоту h на основание AD. Так как диаметр вписанной окружности равен h, то нам надо найти BH из треугольника ABH.



По условию задачи площадь трапеции равна $24\sqrt{3}$, в трапецию вписана окружность и $\angle BAH = 60^\circ$, следовательно,

$$\begin{cases} \dfrac{a+b}{2}\cdot h = 24\sqrt{3}, \\ a+b = 2c, \\ \dfrac{h}{c} = \sin 60^\circ; \end{cases} \quad\Longrightarrow\quad \begin{cases} ch = 24\sqrt{3}, \\ \dfrac{h}{c} = \dfrac{\sqrt{3}}{2}; \end{cases} \quad\Longrightarrow\quad h^2 = 36 \quad\Longrightarrow\quad h = 6,$$

откуда радиус $r = h/2 = 3$.

Ответ. 3.

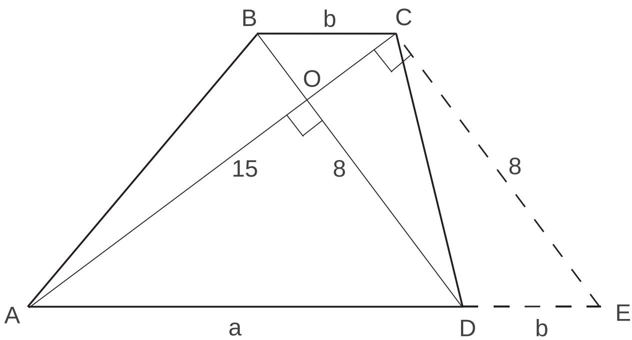
П р и м е р 2. Диагонали трапеции взаимно перпендикулярны и равны 8 и 15. Найти среднюю линию трапеции.

Р е ш е н и е. Рассмотрим трапецию $ABCD$, диагонали которой $AC = 15$ и $BD = 8$ взаимно перпендикулярны.

Заметим, что этим условиям удовлетворяет бесконечное множество различных трапеций, то есть, зная только диагонали и угол между ними, мы не сможем найти длины оснований. Однако нам они и не нужны, а нужна их полусумма.

Покажем, что искомая величина (средняя линия исходной трапеции) равна средней линии треугольника, боковые стороны которого равны диагоналям трапеции, а угол между этими сторонами – углу между диагоналями трапеции.

Отложим на прямой AD отрезок $DE = b$. Так как в четырехугольнике $BCED$ стороны BC и DE параллельны и равны, то он является параллелограммом.



Следовательно, в треугольнике ACE стороны $AC = 15$, $CE = 8$, $AE = a + b$, причем $\angle ACE = \angle AOD = 90^\circ$.

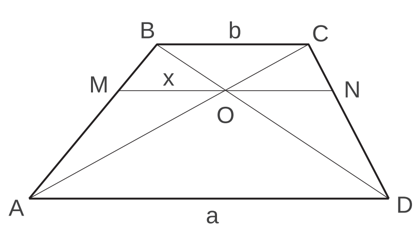
Средняя линия трапеции $ABCD$ равна средней линии треугольника ACE, равна

$$\frac{a+b}{2} = \frac{AE}{2} = \frac{\sqrt{AC^2 + CE^2}}{2} = \frac{\sqrt{15^2 + 8^2}}{2} = \frac{17}{2}.$$

О т в е т. $8,5$.

П р и м е р 3. Через точку пересечения диагоналей трапеции с основаниями a и b проведена прямая, параллельная основаниям. Найти ее отрезок, заключенный между боковыми сторонами.

Р е ш е н и е. Рассмотрим трапецию $ABCD$. Пусть ее диагонали AC и BD пересекаются в точке O. Для того, чтобы выразить длину искомого отрезка MN через длины оснований трапеции, будем использовать подобие треугольников с взаимно параллельными сторонами.



Пусть x – длина отрезка MO, h – высота трапеции, h_1 – высота треугольника MBO.

Из подобия треугольников $\Delta MBO \sim \Delta ABD$ и $\Delta AMO \sim \Delta ABC$ следует, что

$$\begin{cases} \dfrac{x}{a} = \dfrac{h_1}{h}, \\ \dfrac{x}{b} = \dfrac{h-h_1}{h}, \end{cases} \quad \Longrightarrow \quad \frac{x}{b} + \frac{x}{a} = 1 \quad \Longrightarrow \quad x = \frac{ab}{a+b},$$

то есть $MO = \dfrac{ab}{a+b}$. Рассуждая аналогичным образом, можно получить, что $NO = \dfrac{ab}{a+b}$. В результате $MN = MO + NO = \dfrac{2ab}{a+b}$.

О т в е т. $\dfrac{2ab}{a+b}$.

З а м е ч а н и е. По ходу решения этой задачи мы доказали, что отрезок, заключенный между боковыми сторонами произвольной трапеции, проведенный параллельно основаниям через точку пересечения диагоналей, делится этой точкой пополам.

Задачи

1. Найдите площадь равнобедренной трапеции, если ее диагональ, равная 10, образует с основанием угол, косинус которого равен $\dfrac{\sqrt{2}}{10}$.

2. Найдите радиус окружности, вписанной в равнобедренную трапецию, если средняя линия трапеции равна $\sqrt{10}$, а косинус угла при основании трапеции равен $\dfrac{1}{\sqrt{10}}$.

3. Около окружности диаметром 15 описана равнобедренная трапеция с боковой стороной, равной 17. Найдите длину большего основания трапеции.

4. Трапеция $ABCD$ вписана в окружность. Найдите среднюю линию трапеции, если ее большее основание $AD = 15$, $\sin\angle BAC = 1/3$, $\sin\angle ABD = 5/9$.

5. По основаниям a и b трапеции определить отношение, в котором ее диагонали делят друг друга.

6. Доказать, что если диагонали трапеции равны, то она является равнобедренной.

7. В трапеции $ABCD$ длина боковой стороны AB равна 10, длина основания AD равна 13, а $\angle ABC = 135°$. Выяснить, что больше: длина стороны AB или длина диагонали BD.

8. Основания трапеции равны a и b. Найти длину отрезка, соединяющего середины диагоналей.

9. В трапеции $ABCD$ с острыми углами при основании AD проведена диагональ AC, которая разбивает его на два подобных треугольника. Длина основания AD равна a, а длина основания BC равна b. Вычислить длину диагонали AC.

10. В равнобедренной трапеции средняя линия равна a, а диагонали взаимно перпендикулярны. Найти площадь трапеции.

11. Доказать, что биссектрисы углов, прилежащие к одной из не параллельных сторон трапеции, пересекаются под прямым углом в точке, лежащей на средней линии трапеции (или ее продолжении).

12. В трапеции $ABCD$ диагональ AC является биссектрисой угла A. Биссектриса угла B пересекает большее основание AD в точке E. Найдите высоту трапеции, если $AC = 8\sqrt{5}$, $BE = 4\sqrt{5}$.

13. В равнобокой трапеции $ABCD$ основания $AD = 12$, $BC = 6$, высота равна 4. Диагональ AC делит угол BAD трапеции на две части. Какая из них больше?

14. В равнобедренную трапецию площадью 28 вписана окружность радиуса 2. Найти боковую сторону трапеции.

15. Периметр равнобедренной трапеции вдвое больше длины вписанной окружности. Найти угол при основании трапеции.

16. Площадь трапеции $ABCD$ с основаниями AD и BC $(AD > BC)$ равна 128, площадь треугольника BOC, где O – точка пересечения диагоналей трапеции, равна 2. Найти площадь треугольника AOD.

17. Через точку O пересечения диагоналей трапеции проведена прямая, параллельная основанию. Определить длину отрезка этой прямой между боковыми сторонами трапеции, если средняя линия трапеции равна $4/3$, а точка O делит диагональ трапеции на части, отношение которых равно $1/3$.

18. В равнобедренной трапеции диагональ имеет длину 8 и является биссектрисой одного из углов. Может ли одно из оснований этой трапеции быть меньше 4, а другое равно 5?

19. В трапеции $ABCD$ основание $AD = 16$, $AB + BD = 40$, $\angle CBD = 60°$. Отношение площадей треугольников ABO и BOC, где O – точка пересечения диагоналей, равно 2. Найти площадь трапеции.

3.3. Общие четырехугольники. Правильные многоугольники

Теоретический материал

Напомним основные факты, связанные с произвольными выпуклыми[7] четырехугольниками.

- *Площадь* выпуклого четырехугольника равна: $S = \dfrac{1}{2} \cdot d_1 d_2 \sin\alpha$, где d_1 и d_2 – диагонали, а α – угол между ними.
- В выпуклый четырехугольник *можно вписать окружность* тогда и только тогда, когда суммы длин его противоположных сторон равны.

[7]В этом разделе мы будем рассматривать только выпуклые многоугольники.

- Около выпуклого четырехугольника *можно описать окружность* тогда и только тогда, когда сумма двух его противоположных углов равна 180°.

- *Теорема Вариньона:* середины сторон выпуклого четырехугольника являются вершинами параллелограмма.

Помимо четырехугольников в этом разделе будут рассматриваться правильные n-угольники с $n > 4$.

Правильный многоугольник – это многоугольник с равными сторонами и равными углами.

Напомним основные факты, связанные с правильными многоугольниками.

- Вокруг правильного многоугольника можно описать окружность и в него можно вписать окружность.

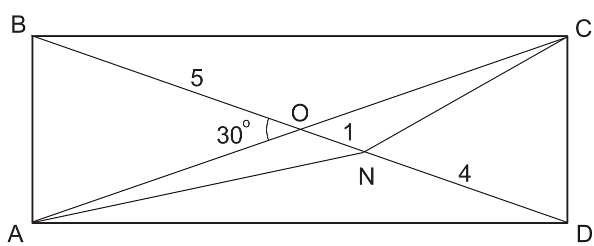
- Центр вписанной окружности совпадает с центром описанной окружности и называется *центром правильного многоугольника.*

- Сумма внутренних углов произвольного выпуклого n-угольника равна $\pi(n-2)$.

Примеры решения задач

Пример 1. На диагонали BD прямоугольника $ABCD$ взята точка N так, что $BN : ND = 3 : 2$. Диагонали прямоугольника пересекаются в точке O. Найдите площадь четырехугольника $ABCN$, если $AC = 10$ и $\angle AOB = 30^\circ$.

Решение. Так как диагонали прямоугольника равны, то $BD = AC = 10$.

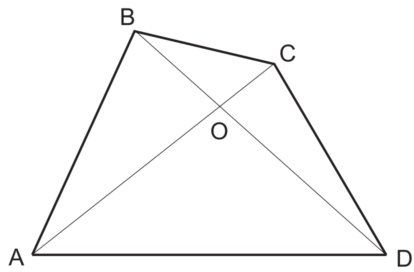


Из условия $BN : ND = 3 : 2$ следует, что $BN = 6$, $ND = 4$ и

$$S_{ABCN} = \frac{1}{2} \cdot AC \cdot BN \cdot \sin 30^\circ = \frac{1}{2} \cdot 10 \cdot 6 \cdot \frac{1}{2} = 15.$$

Ответ. 15.

Пример 2. Дан выпуклый четырехугольник $ABCD$, у которого $AB + BD \leq$ $\leq AC + CD$. Сравните длины отрезков AB и AC.



Решение. Здесь нам понадобится следующее вспомогательное утверждение: в любом выпуклом четырехугольнике сумма диагоналей больше суммы двух противоположных сторон.

Для доказательства этого утверждения сложим два неравенства треугольника (для ΔABO и ΔCDO, где O – точка пересечения диагоналей):

$$AB < AO + BO, \quad CD < CO + DO \quad \Longrightarrow \quad AB + CD < AC + BD,$$

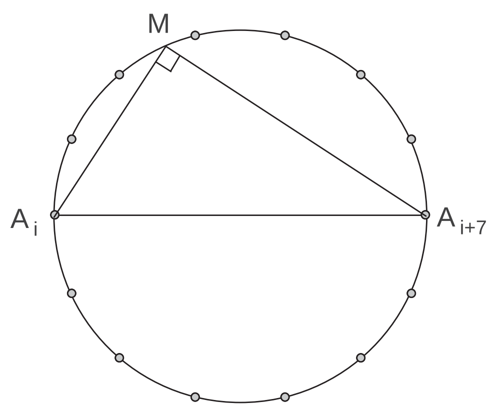
что и требовалось доказать.

Сложив полученное неравенство с исходным неравенством $AB + BD \leq$ $\leq AC + CD$, получим:

$$(AB + CD) + (AB + BD) < (AC + BD) + (AC + CD) \quad \Longleftrightarrow \quad AB < AC.$$

Ответ. $AB < AC$.

Пример 3. В окружность радиуса 1 вписан правильный четырнадцатиугольник. Найти сумму квадратов расстояний от произвольной точки окружности до всех вершин этого четырнадцатиугольника.



Решение. Пусть M – произвольная точка окружности, A_i (где $i =$ $= 1, 2, ..., 14$) – вершины четырнадцатиугольника. Заметим, что вершины A_i и A_{i+7} (где $i = 1, 2, ..., 7$) являются диаметрально противоположными и если точка M не совпадает ни с A_i, ни с A_{i+7}, то $A_iA_{i+7}M$ – прямоугольный треугольник. В этом случае по теореме Пифагора

$$MA_i^2 + MA_{i+7}^2 = 4.$$

Если же $M = A_i$ (или $M = A_{i+7}$), то также

$$MA_i^2 + MA_{i+7}^2 = 0^2 + 2^2 = 4.$$

Всего у нас 7 таких пар, следовательно, сумма всех MA_i^2 равна 28.

Ответ. 28.

Задачи

1. Один из внутренних углов правильного n-угольника равен $150°$. Найдите число сторон многоугольника.

2. Внешний угол правильного многоугольника меньше внутреннего угла на $140°$. Найдите сумму углов данного многоугольника.

3. Вычислите синус угла правильного восьмиугольника.

4. Сторона правильного восьмиугольника равна 1. Найдите площадь описанного круга.

5. Найти расстояние между параллельными сторонами правильного шестиугольника, если радиус описанной около него окружности равен $10\sqrt{3}$.

6. Сколько сторон имеет правильный многоугольник, у которого отношение длины описанной окружности к стороне многоугольника равно 2π?

7. Около квадрата описана окружность, и в квадрат вписана окружность. Найдите радиус вписанной окружности, если радиус описанной окружности равен $10\sqrt{2}$.

8. Меньшая диагональ правильного шестиугольника равна $5\sqrt{3}$. Найдите его большую диагональ.

9. В окружность вписаны правильный треугольник и шестиугольник. Найти отношение площади шестиугольника к площади треугольника.

10. В правильный шестиугольник вписана окружность, которая в свою очередь описана около квадрата со стороной $\sqrt[4]{12}$. Найти площадь шестиугольника.

11. Центр правильного двенадцатиугольника (точка O) соединен с двумя соседними вершинами A и B. Найти расстояние от точки A до отрезка OB, если длина отрезка OB равна 20.

12. По углам четырехугольника определить угол между биссектрисами двух противоположных углов.

13. Какой четырехугольник с диагоналями d_1 и d_2 имеет максимальную площадь.

14. Из всех четырехугольников, вписанных в окружность, найти четырехугольник наибольшей площади.

15. В выпуклом четырехугольнике $ABCD$ известно, что $AB = a$, $BC = b$, $CD = c$, $DA = d$. Доказать, что его площадь $S \leq \dfrac{ab+cd}{2}$.

16. В выпуклом четырехугольнике $ABCD$ известно, что $AB = a$, $BC = b$, $CD = c$, $DA = d$. Доказать, что его площадь $S \leq \dfrac{ac+bd}{2}$.

17. Доказать, что если отрезок, соединяющий середины двух противоположных сторон выпуклого четырехугольника, равен полусумме двух других сторон, то этот четырехугольник – трапеция.

18. Внутри выпуклого четырехугольника найти точку, сумма расстояний от которой до вершин четырехугольника минимальна.

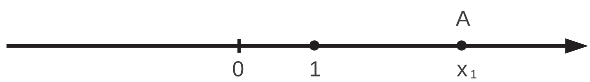
4. Координаты и векторы

4.1. Декартовы координаты и векторы на плоскости

Теоретический материал

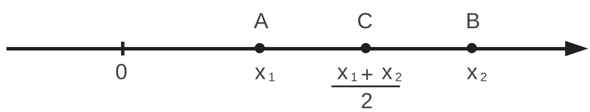
Напомним основные сведения, связанные с декартовыми координатами и векторами на плоскости.

Координатной прямой называется прямая, на которой выбраны: начальная точка, положительное направление и отрезок, принятый за единицу масштаба. В этом случае положение точки на прямой задаётся одним числом – её *координатой*.

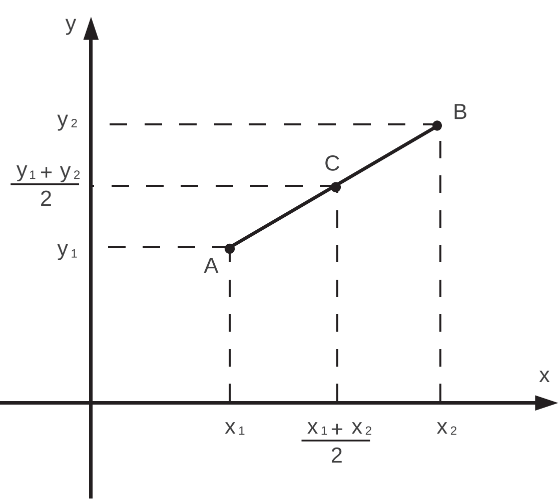


Расстояние между двумя точками $A(x_1)$ и $B(x_2)$ равно $d = |x_1 - x_2|$.

Координата середины отрезка AB равна $\dfrac{x_1 + x_2}{2}$.



Прямоугольной декартовой системой координат на плоскости называются две взаимно перпендикулярные координатные прямые x (ось абсцисс) и y (ось ординат) с масштабом, одинаковым для обеих осей. Точка пересечения координатных прямых называется *началом координат* и является начальной точкой для каждой из них.



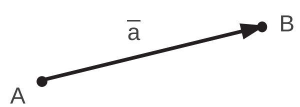
В этом случае каждой точке плоскости ставится в соответствие пара чисел – абсцисса (соответствующая координата прямоугольной проекции этой точки на ось x) и ордината (соответствующая координата прямоугольной проекции этой точки на ось y). Обозначение: $A(x_1; y_1)$ или $(x_1; y_1)$.

Расстояние между двумя точками $A(x_1; y_1)$ и $B(x_2; y_2)$ равно

$$d = \sqrt{(x_1 - x_2)^2 + (y_1 - y_2)^2}.$$

Координаты середины отрезка AB равны $\left(\dfrac{x_1 + x_2}{2}; \dfrac{y_1 + y_2}{2}\right)$.

Вектором называется направленный отрезок. *Абсолютной величиной* (или *модулем*) вектора называется длина этого отрезка. Обозначение: $|\overline{a}|$ или $|\overline{AB}|$.



Нулевым вектором называется вектор, начало и конец которого совпадают. Обозначение: $\overline{0}$. Направления нулевой вектор не имеет, а его абсолютная величина равна нулю.

Два отличных от нуля вектора называются *коллинеарными*, если они лежат на одной прямой или на параллельных прямых.

Коллинеарные векторы $\overline{AB}$ и $\overline{CD}$ называются *одинаково направленными*, если лучи AB и CD одинаково направлены. Векторы $\overline{MN}$ и $\overline{PQ}$ называются *противоположно направленными*, если лучи MN и PQ противоположно направлены.

Два вектора называются *равными*, если они одинаково направлены и равны по абсолютной величине. Все нулевые векторы равны между собой по определению.

Координатами вектора $\overline{a}$ с началом в точке $A(x_1; y_1)$ и концом в точке $B(x_2; y_2)$ называются числа $a_1 = x_2 - x_1$, $a_2 = y_2 - y_1$. Обозначение: $\overline{a}(a_1; a_2)$ или $\overline{(a_1; a_2)}$. Заметим, что равенство соответствующих координат двух векторов равносильно равенству самих векторов.

Вектор называется *единичным*, если его абсолютная величина равна единице. Единичные векторы $\overline{e}_1(1; 0)$ и $\overline{e}_2(0; 1)$ называются *координатными векторами* или *ортами*.

Заметим, что любой вектор можно представить в виде:

$$\overline{a} = \overline{(a_1; a_2)} = \overline{(a_1; 0)} + \overline{(0; a_2)} = a_1\overline{e}_1 + a_2\overline{e}_2.$$

Действия с векторами

Суммой двух векторов называется вектор, координаты которого являются суммами координат данных векторов, следовательно, на плоскости

$$\overline{(a_1; a_2)} + \overline{(b_1; b_2)} = \overline{(a_1 + b_1; a_2 + b_2)}.$$

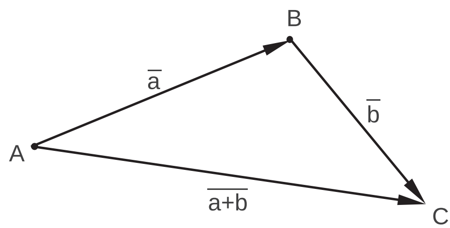
Свойства суммы векторов:

$$\overline{a}+\overline{0}=\overline{a}, \qquad \overline{a}+\overline{b}=\overline{b}+\overline{a}, \quad \overline{a}+(\overline{b}+\overline{c})=(\overline{a}+\overline{b})+\overline{c}.$$

Правило треугольника: для любых точек A, B и C справедливо векторное равенство

$$\overline{AB}+\overline{BC}=\overline{AC},$$

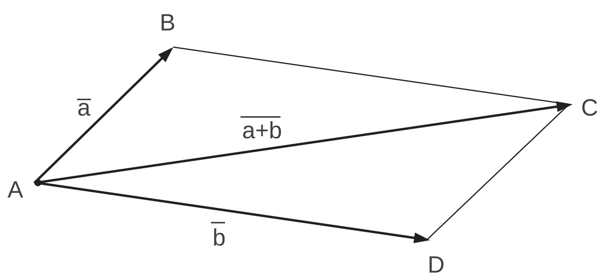
то есть для того, чтобы построить вектор $\overline{a+b}$ достаточно от конца вектора a отложить вектор b.



Правило параллелограмма: для любых точек A, B и D справедливо векторное равенство

$$\overline{AB}+\overline{AD}=\overline{AC},$$

где AC – диагональ параллелограмма, построенного на векторах $\overline{AB}$ и $\overline{AD}$.



Произведением вектора на число λ называется вектор, координатами которого являются координаты данного вектора, умноженные на число λ, следовательно, на плоскости

$$\lambda\overline{(a_1;a_2)}=\overline{(a_1;a_2)}\lambda=\overline{(\lambda a_1;\lambda a_2)}.$$

Заметим, что направление вектора $\lambda\overline{a}$ при $\overline{a}\neq\overline{0}$ совпадает с направлением вектора $\overline{a}$, если $\lambda>0$, и противоположно направлению вектора $\overline{a}$, если $\lambda<0$.

Свойства произведения вектора на число:

$$(\lambda_1+\lambda_2)\overline{a}=\lambda_1\overline{a}+\lambda_2\overline{a}, \qquad \lambda(\overline{a}+\overline{b})=\lambda\overline{a}+\lambda\overline{b}, \qquad |\lambda\overline{a}|=|\lambda||\overline{a}|.$$

Скалярным произведением векторов называется число, равное сумме попарных произведений координат этих векторов, следовательно, на плоскости

$$\overline{a}\cdot\overline{b}=a_1b_1+a_2b_2.$$

Заметим, что $\overline{a}\cdot\overline{a}=|\overline{a}|^2$.

Свойства скалярного произведения:

$$(\overline{a}+\overline{b})\overline{c}=\overline{ac}+\overline{bc}, \qquad (\lambda\overline{a})\overline{b}=\overline{a}(\lambda\overline{b})=\lambda\overline{a}\overline{b}, \qquad \overline{a}\cdot\overline{b}=|\overline{a}||\overline{b}|\cos\varphi,$$

где φ – угол между векторами $\overline{a}$ и $\overline{b}$.

З а м е ч а н и е. Из последнего свойства следует, что скалярное произведение двух отличных от нуля векторов равно нулю тогда и только тогда, когда эти векторы перпендикулярны.

Общее уравнение прямой в декартовых координатах на плоскости

Любая прямая в декартовых координатах x, y имеет уравнение вида

$$ax+by+c=0.$$

Если коэффициент при y отличен от нуля, то уравнение можно разрешить относительно y и записать в виде функции от x:

$$y=kx+q,$$

где коэффициент k (*угловой коэффициент прямой*) равен тангенсу угла, который образует прямая с осью x.

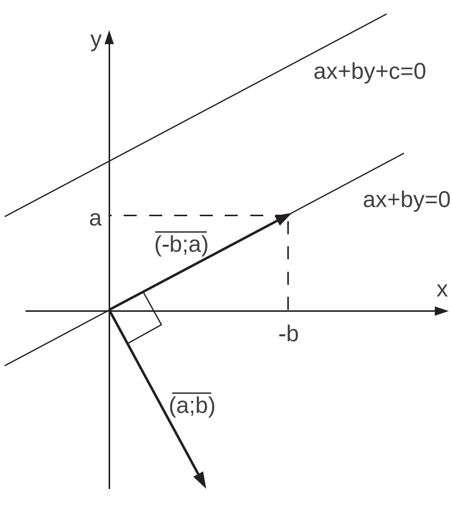
Взаимное расположение прямых на плоскости. Пусть прямые l_1 и l_2 заданы соответственно уравнениями $a_1x+b_1y+c_1=0$ и $a_2x+b_2y+c_2=0$, тогда

$$\frac{a_1}{a_2}=\frac{b_1}{b_2}\neq\frac{c_1}{c_2} \iff l_1\parallel l_2,$$

$$\frac{a_1}{a_2}=\frac{b_1}{b_2}=\frac{c_1}{c_2} \iff l_1=l_2,$$

$$a_1a_2+b_1b_2=0 \iff l_1\perp l_2.$$

Геометрический смысл коэффициентов общего уравнения прямой. Рассмотрим две прямые: основную прямую, заданную уравнением $ax+by+c=0$, и вспомогательную прямую, заданную уравнением $ax+by=0$.



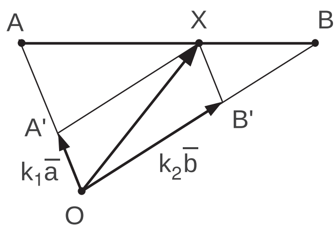
Заметим, что вспомогательная прямая проходит через начало координат и параллельна основной прямой. Так как точка $(-b; a)$ принадлежит вспомогательной прямой, то она направлена вдоль вектора $\overline{(-b; a)}$. А так как $\overline{(a; b)} \perp \overline{(-b; a)}$, то вектор $\overline{(a; b)}$ перпендикулярен вспомогательной прямой.

Следовательно, коэффициенты a и b общего уравнения прямой являются координатами вектора, перпендикулярного этой прямой.

Примеры решения задач

Пример 1. Даны три точки: O, A, B. Точка X делит отрезок AB в отношении $\lambda : \mu$, считая от точки A. Выразите вектор $\overline{OX}$ через векторы $\overline{OA} = \overline{a}$ и $\overline{OB} = \overline{b}$.

Решение. Представим вектор $\overline{OX}$ в виде $\overline{OX} = k_1\overline{a} + k_2\overline{b}$ и выразим коэффициенты разложения k_1 и k_2 через заданные числа λ и μ.



Проведём через точку X прямые, параллельные AO и BO. Полученный четырёхугольник $OA'XB'$ является параллелограммом, следовательно,

$$\overline{OX} = \overline{OA'} + \overline{OB'} = k_1\overline{a} + k_2\overline{b}.$$

Для того, чтобы найти значение k_1 применим теорему Фалеса ($XA' \parallel BO$):

$$k_1 = \frac{OA'}{OA} = \frac{BX}{AB} = \frac{\mu}{\mu + \lambda}.$$

Также с помощью теоремы Фалеса ($XB' \parallel AO$) найдём значение k_2:

$$k_2 = \frac{OB'}{OB} = \frac{AX}{AB} = \frac{\lambda}{\mu + \lambda}.$$

В результате

$$\overline{OX} = \frac{\mu}{\mu + \lambda}\overline{a} + \frac{\lambda}{\mu + \lambda}\overline{b} = \frac{\mu\overline{a} + \lambda\overline{b}}{\mu + \lambda}.$$

Ответ. $\dfrac{\mu\overline{a} + \lambda\overline{b}}{\mu + \lambda}$.

П р и м е р 2. Дана прямая $2x+3y-1=0$. Составить уравнение прямой, проходящей через точку $(-1;1)$ перпендикулярно данной прямой.

Р е ш е н и е. Прямая $2x+3y-1=0$ перпендикулярна вектору $\overline{(2;3)}$. Следовательно, искомая прямая параллельна вектору $\overline{(2;3)}$ и её уравнение имеет вид

$$3x-2y+c=0.$$

Значение коэффициента c можно определить, используя условие принадлежности точки $(-1;1)$ этой прямой:

$$3\cdot(-1)-2\cdot 1+c=0 \quad\Longrightarrow\quad c=5.$$

О т в е т. $3x-2y+5=0$.

Задачи

1. Докажите, что для любых векторов $\overline{a}$ и $\overline{b}$ выполняется неравенство $|\overline{a}+\overline{b}|\le|\overline{a}|+|\overline{b}|$.
2. Даны вершины треугольника $A(1;2)$, $B(5;1)$, $C(6;5)$. Найдите угол $\angle ABC$.
3. Докажите с помощью векторов, что диагонали ромба перпендикулярны.
4. Даны четыре точки: $A(0;1)$, $B(1;2)$, $C(2;1)$, $D(1;0)$. Докажите, что четырёхугольник $ABCD$ – квадрат.
5. Даны три точки: $A(3;1)$, $B(-1;2)$, $C(0;3)$. Найдите такую точку $D(x;y)$, чтобы векторы $\overline{AB}$ и $\overline{CD}$ были равны.
6. Даны векторы $\overline{a}(1;-1)$, $\overline{b}(-2;1)$, $\overline{c}(-3;0)$. Найдите такие числа λ и μ, чтобы $\overline{c}=\lambda\overline{a}+\mu\overline{b}$.
7. Выразить вектор $\overline{c}(6;1)$ через вектора $\overline{a}(1;-2)$ и $\overline{b}(3;7)$.
8. Даны точки $A(1;-2)$, $B(2;-1)$, $C(0;3)$, $D(4;1)$. Найдите координаты точки M такой, что $\overline{MA}+\overline{MB}+\overline{MC}+\overline{MD}=\overline{0}$.
9. Точка M лежит на стороне AC треугольника ABC, $\angle ABC=\angle AMB=90^\circ$, $BC=2\sqrt{5}$, $MC=2$, $\overline{AM}=x\overline{CM}$. Найдите x.
10. Векторы $\overline{AB}(-3;4)$ и $\overline{BC}(-1;-2)$ являются сторонами треугольника. Найдите длину медианы AM.
11. Дана прямая $2x-y+1=0$. Составить уравнение прямой, проходящей через точку $(1;1)$ параллельно данной прямой.
12. Составить уравнение прямой, проходящей через точку $(0;3)$ и перпендикулярной вектору $\overline{(3;2)}$.
13. Составить уравнение прямой, проходящей через точку $(2;4)$ и параллельной вектору $\overline{(-2;1)}$.

14. В прямоугольнике $ABCD$ $AB = 2$, $\angle BDA = 30^\circ$. Найдите скалярное произведение векторов $\overline{DB}$ и $\overline{CD}$.

15. В параллелограмме $MNPQ$ точка A делит сторону MN в отношении $1:3$, считая от вершины M, точка B делит сторону NP в отношении $1:3$, считая от вершины P. Выразите вектор $\overline{AB}$ через векторы $\overline{NM}$ и $\overline{NP}$.

16. В равностороннем треугольнике ABC из точки D (середины стороны BC) проведен перпендикуляр DK на сторону AC. Разложите вектор $\overline{DK}$ по векторам $\overline{AC}$ и $\overline{AB}$.

17. В трапеции $ABCD$ $(BC \parallel AD)$ точка O – точка пересечения диагоналей. Выразите вектор $\overline{CO}$ через векторы $\overline{CB}$ и $\overline{CD}$, если $AD : BC = 4 : 1$.

СТЕРЕОМЕТРИЯ

Введение

Приведём основные стереометрические определения, связанные с взаимным расположением прямых и плоскостей в пространстве.

Параллельность прямых и плоскостей в пространстве

Две прямые в пространстве называются *параллельными*, если они лежат в одной плоскости и не пересекаются.

Прямая и плоскость называются *параллельными*, если они не пересекаются.

Две плоскости называются *параллельными*, если они не пересекаются.

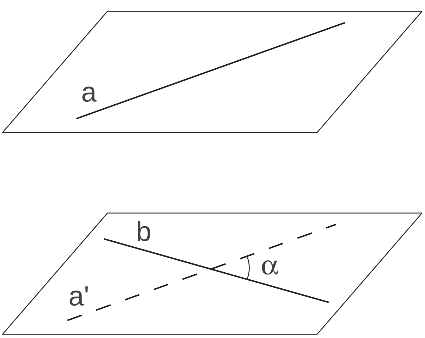
Скрещивающиеся прямые

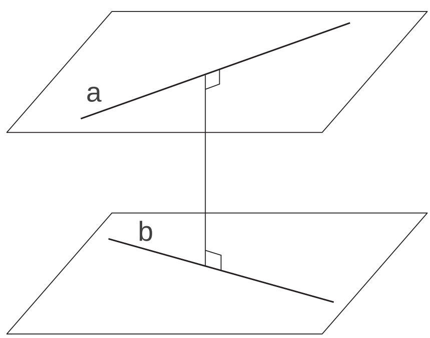
Прямые, которые не лежат в одной плоскости и не пересекаются называются *скрещивающимися.*

Угол между скрещивающимися прямыми определяется как угол между параллельными им прямыми, проходящими через одну точку.

Общим перпендикуляром двух скрещивающихся прямых называется отрезок, концы которого лежат на этих прямых, перпендикулярный к ним (такой отрезок существует и притом только один).

Расстоянием между двумя скрещивающимися прямыми называется длина их общего перпендикуляра (оно же является и расстоянием между параллельными плоскостями, содержащими эти прямые).

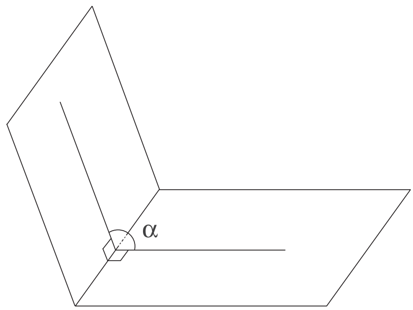




Двугранный угол

Двугранным углом называется фигура, образованная двумя полуплоскостями (*гранями*) с общей ограничивающей их прямой (*ребром двугранного угла*).

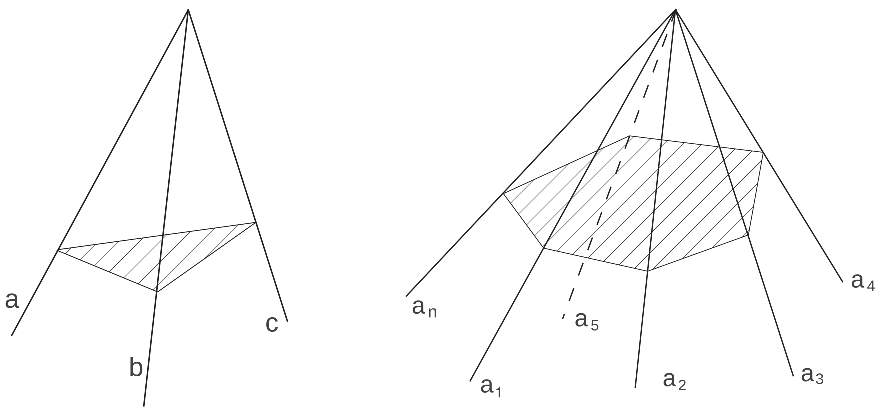
Двугранный угол измеряется своим *линейным углом*, то есть углом между перпендикулярами к ребру, восстановленными в обеих плоскостях из одной точки.



Многогранный угол

Трехгранным углом (abc) называется фигура, составленная из трех плоских углов (ab), (bc) и (ac), не лежащих в одной плоскости. Эти углы называются *гранями трехгранного угла*, а их стороны – *ребрами*. Общая вершина плоских углов называется *вершиной трехгранного угла*. Двугранные углы, образованные гранями трехгранного угла, называются *двугранными углами трехгранного угла*.

Аналогичным образом определяется понятие *n-гранного угла* $(a_1a_2...a_n)$ – как фигуры, составленной из n плоских углов (a_1a_2), (a_3a_3),...,(a_na_1).



Многогранный угол называется *выпуклым*, если он лежит по одну сторону каждой из ограничивающих его плоскостей.

Замечание 1. Каждый плоский угол трехгранного угла меньше суммы двух других плоских углов.

Замечание 2. Сечением выпуклого n-гранного угла плоскостью, не проходящей через вершину, является выпуклый n-угольник.

Замечание 3. В выпуклом многогранном угле сумма плоских углов не превосходит $360°$.

Перпендикулярность прямых и плоскостей в пространстве

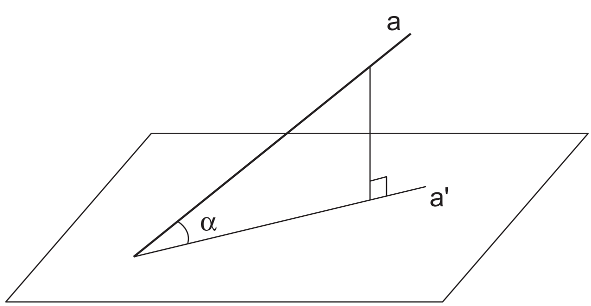
Прямая *перпендикулярна* плоскости, если она перпендикулярна любой прямой в этой плоскости.

Две плоскости *перпендикулярны*, если соответствующий двугранный угол является прямым.

Наклонная

Наклонной, проведенной к данной плоскости, называется прямая, пересекающая плоскость, но не перпендикулярная ей. Точка пересечения наклонной и плоскости называется *основанием наклонной*.

Проекцией точки на плоскость называется основание перпендикуляра, опущенного из данной точки на данную плоскость.



Проекцией наклонной на плоскость называется прямая, состоящая из проекций всех точек наклонной на данную плоскость.

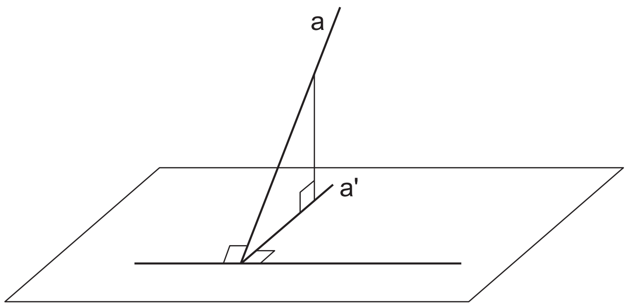
Углом между наклонной и плоскостью называется угол между наклонной и ее проекцией.

Теоремы о параллельности прямых и плоскостей:

- Две прямые, параллельные третьей прямой, параллельны друг другу (*транзитивность параллельности прямых*).
- Ели прямая, не лежащая в плоскости, параллельна какой-нибудь прямой в этой плоскости, то она параллельна и самой плоскости (*признак параллельности прямой и плоскости*).
- Если две пересекающиеся прямые одной плоскости параллельны двум пересекающимся прямым другой плоскости, то эти плоскости параллельны (*признак параллельности плоскостей*).
- Если две параллельные плоскости пересекаются третьей, то прямые пересечения параллельны (*теорема о параллельных плоскостях*).
- Если плоскость содержит прямую, параллельную другой плоскости, и пересекает эту другую плоскость, то линия пересечения плоскостей параллельна первой прямой.

Теоремы о перпендикулярности прямых и плоскостей:

- Если прямая, перпендикулярна двум пересекающимся прямым в плоскости, то она перпендикулярна этой плоскости (*признак перпендикулярности прямой и плоскости*).
- Если плоскость проходит через прямую, перпендикулярную другой плоскости, то эти плоскости перпендикулярны (*признак перпендикулярности плоскостей*).
- Прямая, лежащая в плоскости, перпендикулярна проекции наклонной на эту плоскость тогда и только тогда, когда эта прямая перпендикулярна самой наклонной (*теорема о трех перпендикулярах*).



- Два различных перпендикуляра к одной и той же плоскости параллельны.
- Две плоскости, перпендикулярные одной и той же прямой, параллельны.
- Перпендикуляр к одной из двух взаимно перпендикулярных плоскостей, проходящий через линию пересечения этих плоскостей, целиком лежит во второй плоскости.

З а м е ч а н и е. Последняя теорема имеет важное следствие: если каждая из двух непараллельных плоскостей перпендикулярна третьей плоскости, то прямая пересечения этих двух плоскостей также перпендикулярна этой третьей плоскости.

5. Призма

5.1. Прямая призма

Теоретический материал

Изучение этого раздела начнём с формулировок основных определений и утверждений, связанных с призмами.

Основные определения

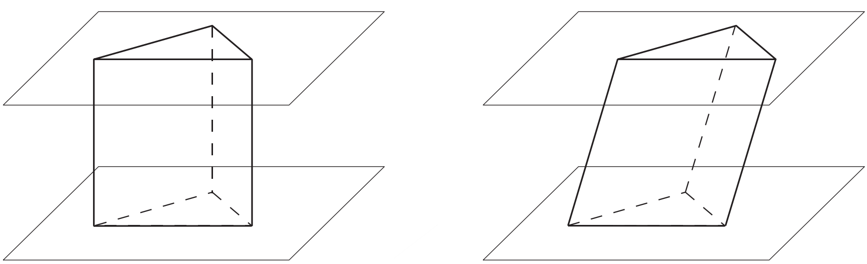
Многогранником называется тело, ограниченное в пространстве конечным числом плоскостей.

Многогранник называется *выпуклым*[8], если он лежит по одну сторону от каждой из ограничивающих его плоскостей.

Общая часть поверхности многогранника и ограничивающей его плоскости называется *гранью многогранника*[9], стороны граней – *ребрами многогранника*, а вершины – *вершинами многогранника.*

N*-угольной призмой* называется многогранник, две грани которого равные n-угольники, лежащие в параллельных плоскостях (*основания призмы*), а остальные грани – параллелограммы (*боковые грани*).

Призма называется *прямой*, если ее боковые ребра перпендикулярны основаниям; в противном случае призма называется *наклонной.*



Прямая призма называется *правильной*, если ее основаниями являются правильные многоугольники.

Призма, основанием которой является параллелограмм, называется *параллелепипедом.*

Прямой параллелепипед, у которого основанием является прямоугольник, называется *прямоугольным параллелепипедом.*

Прямоугольный параллелепипед с равными ребрами называется *кубом.*

Высотой призмы называется перпендикуляр, проведенный из какой-либо точки плоскости одного основания к плоскости другого основания.

[8]В дальнейшем мы будем рассматривать только выпуклые многогранники.
[9]Все грани выпуклого многогранника являются выпуклыми многоугольниками.

Основные утверждения

Объем произвольной призмы: $V = SH$, где S – площадь основания, H – высота призмы.

Объем прямоугольного параллелепипеда: $V = abc$, где a, b, c – длины трех ребер, выходящих из одной вершины.

Объем куба: $V = a^3$, где a – длина ребра куба.

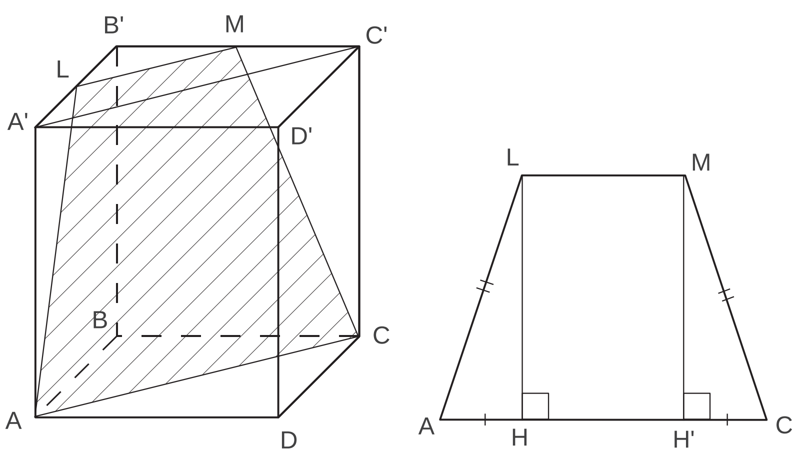
Свойства параллелепипеда:

- противолежащие грани попарно равны и параллельны;
- все четыре диагонали пересекаются в одной точке (центре симметрии параллелепипеда) и делятся этой точкой пополам.

Примеры решения задач

Пример 1. Дана правильная четырехугольная призма $ABCDA'B'C'D'$ со стороной основания $2\sqrt{2}$ и высотой $4\sqrt{5}$. Найдите площадь сечения, проходящего через вершины A, C и середину ребра $A'B'$.

Решение. Пусть L – середина ребра $A'B'$. Построим сечение, проходящее через точки A, C и L. Нижнее основание призмы пересекается с плоскостью искомого сечения по прямой AC. Так как секущая плоскость пересекает параллельные плоскости по параллельным прямым, то прямая пересечения верхнего основания с плоскостью искомого сечения параллельна прямой AC.



Диагонали оснований призмы попарно параллельны, следовательно, искомое сечение пересекает верхнее основание по прямой, проходящей через точку L параллельно диагонали $A'C'$.

Обозначим точку пересечения этой прямой с ребром $B'C'$ через M. Заметим, что отрезок LM является средней линией в треугольнике $A'B'C'$ и, следовательно, равен половине отрезка $A'C'$. Таким образом, искомым сечением является трапеция $ACML$ с основаниями

$$AC = AB\sqrt{2} = 4, \quad ML = \frac{AC}{2} = 2$$

и боковыми сторонами

$$AL = CM = \sqrt{(AA')^2 + (A'L)^2} = \sqrt{82}.$$

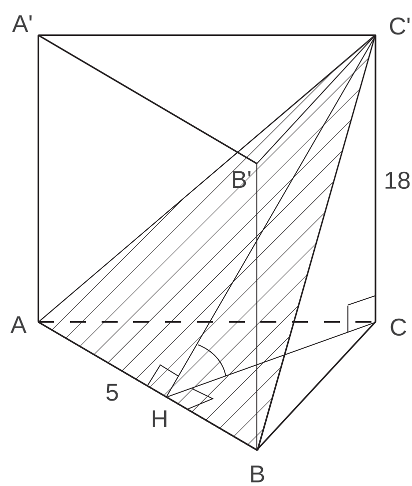
Найдем высоту трапеции LH. Проекции боковых сторон на нижнее основание равны

$$AH = CH' = \frac{AC - LM}{2} = 1 \quad \Longrightarrow \quad LH = \sqrt{AL^2 - AH^2} = 9.$$

В результате площадь сечения равна $S = \dfrac{AC + LM}{2} \cdot LH = 27.$

Ответ. 27.

Пример 2. Высота прямой призмы $ABCA'B'C'$ равна 18. Основание призмы – треугольник ABC, площадь которого равна 12, $AB = 5$. Найдите тангенс угла между плоскостью ABC' и плоскостью основания призмы.



Решение. Двугранный угол измеряется углом между перпендикулярами к ребру, восстановленными в обеих плоскостях из одной точки. В качестве основания перпендикуляра, восстановленного к ребру AB в плоскости ABC', удобно взять основание высоты $C'H$ треугольника ABC'.

Заметим, что прямая CH является проекцией наклонной $C'H$ на плоскость ABC, поскольку ребро CC' перпендикулярно плоскости ABC.

Так как по построению наклонная $C'H$ перпендикулярна отрезку AB, то и ее проекция CH тоже перпендикулярна этому отрезку (по теореме о трех перпендикулярах). Следовательно, искомым углом является угол $C'HC$. Тангенс этого угла найдем из прямоугольного треугольника $C'HC$.

Катет $CC' = 18$ по условию задачи. Второй катет CH является высотой треугольника ABC. С помощью формулы для площади треугольника получим

$$S_{\Delta ABC} = \frac{1}{2} \cdot AB \cdot CH \quad \Longleftrightarrow \quad 12 = \frac{1}{2} \cdot 5 \cdot CH \quad \Longleftrightarrow \quad CH = 4,8.$$

Следовательно, $\operatorname{tg} \angle C'HC = \dfrac{CC'}{CH} = \dfrac{18}{4,8} = 3,75.$

Ответ. 3,75.

Задачи

1. Дан куб $ABCDA'B'C'D'$. Через точки B, D и середину ребра $D'C'$ проведена секущая плоскость. Найдите площадь полной поверхности куба, если площадь сечения равна 144.

2. В прямоугольном параллелепипеде $ABCDA'B'C'D'$ $AB = 6$, $BC = 8$, $BB' = 1,6\sqrt{91}$. Найдите площадь сечения параллелепипеда плоскостью, параллельной прямой AC и содержащей прямую BA'.

3. Дан куб $ABCDA'B'C'D'$ с ребром 1. Найдите градусную меру угла между прямыми AC' и CB'.

4. Ребро куба $ABCDA'B'C'D'$ равно 4. Точка K – середина ребра DD'. Точки M и H лежат на ребрах $A'B'$ и AB соответственно, причем $A'M : MB' = 1 : 3$, $AH : HB = 3 : 1$. Найдите градусную меру угла между прямыми MH и KC'.

5. Дана прямая призма $ABCDA'B'C'D'$, в основании которой лежит квадрат со стороной 2. Боковое ребро призмы равно $\dfrac{\sqrt{6}}{3}$. Найдите градусную меру угла между плоскостью треугольника $AB'C$ и плоскостью основания призмы.

6. Основанием прямой призмы $ABCDA'B'C'D'$ является прямоугольник $ABCD$, стороны которого равны $6\sqrt{5}$ и $12\sqrt{5}$. Высота призмы равна 8. Секущая плоскость проходит через вершину D' и середины ребер AD и CD. Найдите косинус угла между плоскостью основания и плоскостью сечения.

7. Основание прямой треугольной призмы $ABCA'B'C'$ правильный треугольник ABC, сторона которого равна $8\sqrt{3}$. На ребре отмечена точка P так, что $BP : PB' = 3 : 5$. Найдите тангенс угла между плоскостями ABC и ACP, если расстояние между прямыми BC и $A'C'$ равно 16.

8. Основание прямого параллелепипеда $ABCDA'B'C'D'$ – параллелограмм $ABCD$, в котором $CD = 2\sqrt{3}$, $\angle D = 60^\circ$. Тангенс угла между плоскостью основания и плоскостью $A'BC$ равен 6. Найдите высоту параллелепипеда.

9. В правильной призме $MNPM'N'P$ сторона основания равна 12, а диагональ грани MN' образует с плоскостью основания угол 45°. Найдите площадь сечения, проходящего через середину ребра NP параллельно плоскости MPP'.

10. На диагональ куба, соединяющую две его вершины, не лежащие в одной грани, провели перпендикуляры из остальных вершин куба. На сколько частей и в каком отношении основания этих перпендикуляров разделили диагональ?

5.2. Наклонная призма

Теоретический материал

В отличие от прямой призмы, ребра наклонной призмы не перпендикулярны основаниям, поэтому иногда бывает удобно провести сечение призмы плоскостью, перпендикулярной ребрам. В этом случае справедливы следующие формулы.

Объем наклонной призмы: $V = S_{\text{п}}L$, где $S_{\text{п}}$ – площадь перпендикулярного сечения, L – боковое ребро призмы.

Площадь боковой поверхности: $S_{\text{бок}} = P_{\text{п}}L$, где $P_{\text{п}}$ – периметр перпендикулярного сечения.

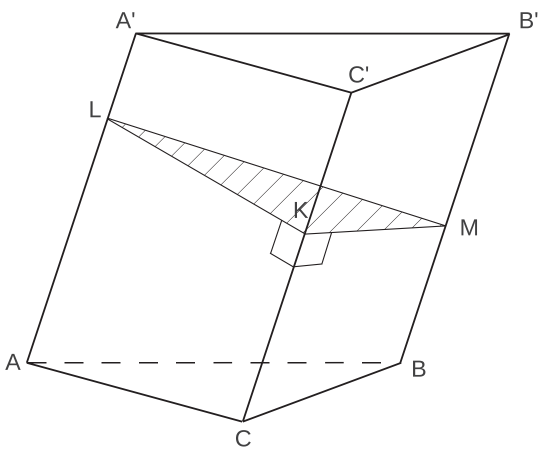
Замечание. Приведенные формулы справедливы и для прямой призмы, причем в качестве перпендикулярного сечения можно использовать основание призмы.

Перед тем, как приступить к решению задач этого раздела, рекомендуется повторить все определения и теоремы, приведенные в предыдущем разделе.

Примеры решения задач

Пример 1. Площади двух боковых граней наклонной треугольной призмы равны 8 и 6, угол между ними равен 90°, боковое ребро равно 2. Найдите площадь боковой поверхности призмы.

Решение. Пусть площади граней $AA'C'C$ и $BB'C'C$ равны 8 и 6 соответственно, тогда для вычисления площади боковой поверхности призмы нам необходимо найти площадь параллелограмма $AA'B'B$.



Рассмотрим сечение треугольной призмы $ABCA'B'C'$ плоскостью, перпендикулярной ребрам призмы. Пусть L, M и K – точки пересечения ребер AA', BB' и CC' с этой плоскостью. Так как по построению ребра призмы перпендикулярны плоскости LMK, то они перпендикулярны и любым прямым, лежащим в этой плоскости, в частности прямым LM, MK и KL.

Следовательно, LM, MK и KL – высоты соответствующих параллелограммов, являющихся боковыми гранями призмы. Зная площади граней $AA'C'C$, $BB'C'C$ и длину бокового ребра $AA' = 2$, вычислим длины высот KL и MK:

$$S_{AA'C'C} = 8 \quad \Longrightarrow \quad 2 \cdot KL = 8 \quad \Longrightarrow \quad KL = 4;$$

$$S_{BB'C'C} = 6 \quad \Longrightarrow \quad 2 \cdot MK = 6 \quad \Longrightarrow \quad MK = 3.$$

По условию задачи угол между гранями $AA'C'C$ и $BB'C'C$ прямой, значит, $\angle LKM = 90^\circ$. По теореме Пифагора

$$LM = \sqrt{KL^2 + MK^2} = 5,$$

следовательно, $S_{AA'B'B} = 5 \cdot 2 = 10$ и площадь боковой поверхности призмы равна $8 + 6 + 10 = 24$.

О т в е т. 24.

Задачи

1. Основание параллелепипеда $ABCDA'B'C'D'$ – ромб $ABCD$, $\angle A'AB = \angle A'AD = 45^\circ$, $\angle BAD = 60^\circ$. Найдите градусную меру угла между плоскостями граней $AA'D'D$ и $AA'B'B$.

2. Дана призма $ABCDA'B'C'D'$, в основании которой лежит квадрат, а боковые ребра наклонены к плоскости основания под углом в 60°. Отрезок $D'A$ перпендикулярен плоскости основания. Найти длину этого отрезка, если площадь боковой поверхности призмы равна $6(\sqrt{3} + 2)$.

3. В наклонной треугольной призме высота равна $\sqrt{6}$, а боковые ребра составляют с плоскостью основания угол 45°. Площади двух боковых граней равны 3 и 6, а угол между ними 120°. Найдите объем призмы.

4. Основанием наклонной призмы $ABCA'B'C'$ является правильный треугольник ABC со стороной 4. Боковое ребро BB' призмы равно 4 и образует с ребрами BA и BC углы по 45°. Найдите объем призмы.

5. В наклонном параллелепипеде $ABCDA'B'C'D'$ боковое ребро равно 8. Расстояние между ребром AA' и ребрами BB' и DD' соответственно равно 12 и 9, а расстояние между AA' и CC' равно 15. Найти объем параллелепипеда.

6. Основанием наклонной призмы является правильный треугольник ABC со стороной 2. Боковое ребро AA' призмы равно 2 и образует с ребрами AB и AC углы по 60°. Определите площадь грани $BCC'B'$.

7. Все ребра призмы $ABCA'B'C'$ – равны между собой. Углы BAA' и CAA' равны 60° каждый. Найдите расстояние от точки C' до плоскости $CA'B'$, если площадь грани $ABB'A'$ равна $8\sqrt{3}$.

8. Все грани призмы $ABCDA'B'C'D'$ – равные ромбы. Углы BAD, BAA' и DAA' равны 60° каждый. Найдите угол между прямой BA' и плоскостью BDB'.

6. Пирамида

6.1. Правильная пирамида

Теоретический материал

Приведём формулировки основных определений и утверждений, связанных с пирамидами.

Основные определения

N-угольной пирамидой называется многогранник, одной гранью которого является n-угольник (*основание пирамиды*), остальными – треугольники (*боковые грани*), у которых только одна общая вершина (*вершина пирамиды*).

Высотой пирамиды называется перпендикуляр, проведенный из вершины пирамиды к плоскости основания пирамиды.

Пирамида называется *правильной*, если ее основание – правильный многоугольник, а основание высоты совпадает с центром этого многоугольника.

Высота боковой грани правильной пирамиды, проведенная из ее вершины, называется *апофемой.*

Усеченной пирамидой называется многогранник, отсекаемый от пирамиды плоскостью, параллельной основанию, и расположенный между плоскостью сечения и плоскостью основания исходной пирамиды.

Усеченная пирамида называется *правильной*, если она является частью правильной пирамиды.

Высотой усеченной пирамиды называется перпендикуляр, проведенный из какой-либо точки плоскости одного основания к плоскости другого основания.

Апофемой правильной усеченной пирамиды называется высота боковой грани (трапеции).

Основные утверждения

Объем произвольной пирамиды: $V = \dfrac{1}{3}SH$,
где S – площадь основания, H – высота пирамиды.

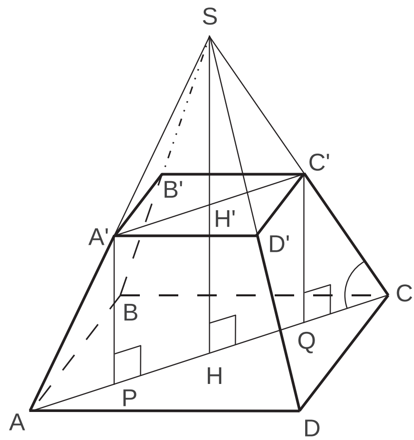
Объем произвольной усеченной пирамиды: $V = \dfrac{1}{3}H\left(S_1 + \sqrt{S_1S_2} + S_2\right)$,
где S_1 и S_2 – площади оснований, H – высота пирамиды.

Площадь боковой поверхности правильной пирамиды: $S_{\text{бок}} = \dfrac{1}{2}Pl$,
где P – периметр основания, l – апофема.

Площадь боковой поверхности правильной усеченной пирамиды: $S_{\text{бок}} = \dfrac{1}{2}(P_1 + P_2)\,l$,
где P_1 и P_2 – периметры оснований, l – апофема.

Примеры решения задач

Пример 1. Стороны оснований правильной усеченной четырехугольной пирамиды равны $3\sqrt{2}$ и $6\sqrt{2}$, а боковое ребро образует с плоскостью основания угол, равный 45°. Найдите объем усеченной пирамиды.



Решение. Для вычисления объема усеченной пирамиды нам необходимо найти ее высоту и площади ее оснований. Пусть усеченная пирамида $ABCDA'B'C'D'$ получена отсечением плоскостью $A'B'C'D'$ из правильной пирамиды $SABCD$. Площадь меньшего основания равна

$$S_1 = S_{A'B'C'D'} = (A'B')^2 = (3\sqrt{2})^2 = 18,$$

площадь большего основания равна

$$S_2 = S_{ABCD} = AB^2 = (6\sqrt{2})^2 = 72.$$

Рассмотрим сечение, проходящее через высоту SH и диагональ основания AC. Искомая высота усеченной пирамиды равна высоте h равнобокой трапеции $AA'C'C$. Основания трапеции равны

$$A'C' = A'B' \cdot \sqrt{2} = 6, \quad AC = AB \cdot \sqrt{2} = 12,$$

проекции боковых сторон трапеции равны

$$AP = QC = \frac{AC - A'C'}{2} = 3.$$

Так как высота SH перпендикулярна плоскости $ABCD$, то угол SCH является углом между боковым ребром и основанием пирамиды и равен 45°. Следовательно, в треугольнике $CC'Q$ углы $\angle CC'Q = \angle C'CQ = 45^\circ$ и он является равнобедренным. В результате, высота $C'Q = CQ = 3$ и объем усеченной пирамиды равен

$$V = \frac{1}{3}h\left(S_1 + \sqrt{S_1S_2} + S_2\right) = 126.$$

Замечание. Можно было обойтись без применения специальной формулы объема усеченной пирамиды, а найти разность объемов пирамид $SABCD$ и $SA'B'C'D'$:

$$V = V_{SABCD} - V_{SA'B'C'D'} = \frac{1}{3}SH \cdot S_2 - \frac{1}{3}SH' \cdot S_1 = 126.$$

Ответ. 126.

Задачи

1. Двугранные углы при основании правильной четырехугольной пирамиды равны 45°, а площадь боковой поверхности равна $36\sqrt{2}$. Найдите объем пирамиды.

2. Вычислите объем правильной треугольной пирамиды, высота которой равна $2\sqrt{3}$, а все плоские углы при вершине прямые.

3. В правильной треугольной пирамиде высота равна 4, а угол между боковым ребром и плоскостью основания равен 45°. Найдите объем пирамиды V. В ответе запишите $\sqrt{3}V$.

4. В правильной четырехугольной пирамиде сторона основания равна высоте и равна 4. Найти расстояние (p) от вершины основания до плоскости диагонального сечения, не проходящего через эту вершину. В ответе запишите $\dfrac{p\sqrt{2}}{2}$.

5. В правильной четырехугольной пирамиде сторона основания равна 4, а высота равна 2. Найдите расстояние (p) между боковым ребром и скрещивающейся с ним диагональю основания. В ответе запишите $3\sqrt{6}p$.

6. В правильной шестиугольной пирамиде $MABCKEF$ с вершиной M длина стороны основания равна $4\sqrt{3}$, а длина апофемы 10. Найдите площадь сечения (S), проходящего через вершину пирамиды и меньшую из диагоналей основания. В ответе запишите $S/\sqrt{19}$.

7. В правильной шестиугольной пирамиде $MABCKEF$ с вершиной M сечение проходит через вершину пирамиды и меньшую из диагоналей основания. Найти отношение объемов частей пирамиды, на которые она делится плоскостью сечения.

8. В правильную четырехугольную пирамиду вписан куб так, что четыре его вершины принадлежат боковым ребрам пирамиды, а четыре другие принадлежат ее основанию. Найдите ребро куба (a), если сторона основания пирамиды равна $\sqrt{2}$, а ее боковое ребро равно 3. В ответе запишите $3\sqrt{2}a$.

6.2. Тетраэдр

Теоретический материал

Тетраэдром называется треугольная пирамида.

Тетраэдр называется *правильным*, если все его ребра равны.

Тетраэдр называется *прямоугольным*, если все три его плоских угла при какой либо его вершине прямые.

Два ребра, имеющие в качестве одного из своих концов общую вершину, называются *смежными*. Два не смежных ребра называются противоположными (или *скрещивающимися*).

Медианой тетраэдра называется отрезок, соединяющий вершину тетраэдра с точкой пересечения медиан противоположной грани. Медианы тетраэдра пересекаются в одной точке, называемой *центроидом*, и делятся этой точкой в отношении $3:1$, считая от вершины.

Бимедианой тетраэдра называется отрезок, соединяющий середины противоположных ребер. Бимедианы пересекаются в одной точке (центроиде тетраэдра) и делятся этой точкой пополам.

Высотой тетраэдра называется перпендикуляр, опущенный из вершины на противоположную грань. Если высоты (или их продолжения) пересекаются в одной точке, то тетраэдр называется *ортоцентрическим*.

Приведем также некоторые полезные сведения относительно расположения основания высоты тетраэдра.

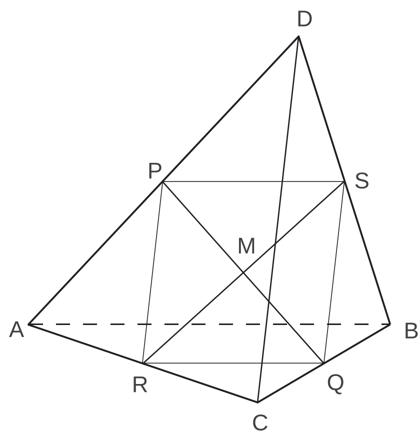
- Основание высоты тетраэдра является центром окружности, описанной около основания тогда и только тогда, когда длины всех боковых ребер равны между собой (или все боковые ребра наклонены к плоскости основания под одним углом).

- Основание высоты тетраэдра является центром окружности, вписанной в основание тогда и только тогда, когда все боковые грани наклонены к плоскости основания под одним углом.

Замечание. Приведенные утверждения справедливы и для произвольной пирамиды.

Примеры решения задач

Пример 1. Докажите, что бимедианы тетраэдра пересекаются в одной точке и делятся этой точкой пополам.



Решение. Рассмотрим произвольный тетраэдр $ABCD$. Пусть отрезок PQ соединяет середины ребер AD и BC, отрезок RS соединяет середины ребер AC и BD. Покажем, что четырехугольник $PSQR$ является параллелограммом.

Так как PS – средняя линия треугольника ABD, а RQ – средняя линия треугольника ABC, то

$$PS \parallel AB, \quad PS = \frac{1}{2}AB \quad \text{и}$$

$$RQ \parallel AB, \quad RQ = \frac{1}{2}AB.$$

Следовательно, четырехугольник $PSQR$ – параллелограмм, а диагонали параллелограмма (бимедианы PQ и RS) пересекаются и точкой пересечения делятся пополам.

Таким образом, мы показали, что бимедиана RS проходит через точку M – середину бимедианы PQ. Аналогичным образом показывается, что и третья бимедиана, соединяющая середины ребер CD и AB, также проходит через точку M.

Задачи

1. Доказать, что основание высоты тетраэдра является центром окружности, описанной около основания тогда и только тогда, когда длины всех боковых ребер равны между собой (или все боковые ребра наклонены к плоскости основания под одним углом).

2. Доказать, что основание высоты тетраэдра является центром окружности, вписанной в основание тогда и только тогда, когда все боковые грани наклонены к плоскости основания под одним углом.

3. Все ребра правильного тетраэдра $ABCD$ равны $\sqrt{6}$. Найдите расстояние от вершины A до плоскости BDC.

4. В основании пирамиды лежит равносторонний треугольник со стороной, равной 2. Одна из боковых граней также равносторонний треугольник и перпендикулярна основанию. Найдите объем пирамиды.

5. Боковое ребро MC пирамиды $MABC$ перпендикулярно плоскости основания ABC и равно 4. Плоскость, параллельная основанию, проходит через середину высоты пирамиды и пересекает боковые ребра в точках A', B' и C'. Найдите площадь боковой поверхности пирамиды $MA'B'C'$, если $AC = BC = 5$, а высота CK треугольника ABC равна 3.

6. Основание пирамиды – треугольник, две стороны которого равны 3 и $\sqrt{3}$, а угол между ними равен 30°. Каждое боковое ребро равно $\sqrt{51}$. Найдите объем пирамиды.

7. Основание пирамиды $MABC$ – треугольник ABC, в котором $AB = BC$, $AC = \sqrt{15}$, $\angle ABC = 120^\circ$. Боковые ребра образуют с плоскостью основания равные углы. Найдите объем пирамиды, если $AM = \sqrt{53}$.

8. Основание пирамиды $ABCD$ – прямоугольный треугольник с гипотенузой $AB = 2\sqrt{30}$. CD – высота пирамиды, боковые ребра AD и BD наклонены к плоскости основания под углами 30° и 60° соответственно. Найдите объем пирамиды.

9. В пирамиде $SABC$ грани SAB и SAC перпендикулярны плоскости основания, ребро BC равно 10, а двугранный угол при ребре BC равен 45°. Найдите объем пирамиды, если площадь ее основания равна 30.

6.3. Произвольные пирамиды

При решении задач этого раздела могут пригодиться все формулы и утверждения, приведенные в двух предыдущих разделах.

Задачи

1. Основанием пирамиды служит прямоугольник, угол между диагоналями которого равен 30°, а площадь равна 9. Боковые ребра образуют с плоскостью основания углы в 45°. Найдите объем пирамиды.

2. Основание пирамиды – квадрат, сторона которого равна 3. Каждая боковая грань наклонена к плоскости основания под углом, тангенс которого равен 4/3. Найдите площадь боковой поверхности пирамиды.

3. Найдите площадь боковой поверхности четырехугольной пирамиды (S), если в основании пирамиды лежит ромб с диагоналями 30 и 40, и все боковые грани пирамиды наклонены к плоскости основания под углом $30°$. В ответе запишите $S\sqrt{3}$.

4. В четырехугольной пирамиде $SABCD$, основанием которой является прямоугольник, длины ребер $SC = 8$, $CD = 6$, а ребро $SB \perp ABC$. Угол между плоскостями SCD и ABC равен $30°$. Во сколько раз площадь основания больше площади грани SBC?

5. В основании пирамиды лежит правильный шестиугольник $ABCDEF$. Боковое ребро BS перпендикулярно плоскости основания и равно ребру основания. Найдите градусную меру угла между боковым ребром FS и плоскостью основания.

6. Основанием пирамиды служит прямоугольник, площадь которого равна $36\sqrt{3}$. Две боковые грани перпендикулярны основанию, а две другие образуют с плоскостью основания углы $45°$ и $30°$. Найдите объем пирамиды (V). В ответе укажите $V\sqrt{3}$.

7. В основании четырехугольной пирамиды $ABCDF$ лежит квадрат со стороной, равной 4. Боковые грани FAD и FCD перпендикулярны плоскости основания пирамиды, а высота пирамиды равна диагонали ее основания. Найдите площадь (S) сечения пирамиды плоскостью, проходящей через прямую AC параллельно прямой FB. В ответе укажите $S\sqrt{2}$.

8. В основании пирамиды $SABCD$ лежит квадрат $ABCD$ со стороной, равной 5. Точка M делит ребро SB в отношении $2 : 3$, считая от точки S. Через точку M проходит сечение, параллельное основанию пирамиды. Найдите его площадь.

9. В основании пирамиды $DABC$ лежит треугольник ABC, в котором $\angle C = 60°$, $AC = 14$, $BC = 8$. Боковые грани DAC и DAB перпендикулярны плоскости основания пирамиды, а ребро AD равно $4\sqrt{3}$. Сечение пирамиды плоскостью, проходящей через середину ребра DB параллельно прямым BC и AD, является основанием второй пирамиды, вершина которой в точке C. Найдите объем второй пирамиды.

10. Основанием пирамиды $FABC$ является треугольник ABC, в котором $\angle ABC = 90°$, $AB = 3$, $BC = 4$. Ребро AF перпендикулярно плоскости ABC и равно 4. Отрезки AM и AL являются соответственно высотами треугольников AFB и AFC. Найдите объем пирамиды $AMLC$.

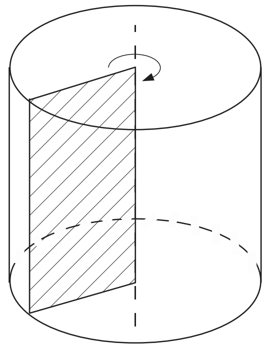
7. Тела вращения

7.1. Цилиндр

Теоретический материал

В этом разделе собраны задачи на вычисление элементов цилиндра и задачи, связанные с описанными и вписанными цилиндрами. Приведем основные определения и теоремы.

Основные определения



Цилиндром (точнее, прямым круговым цилиндром) называется фигура, полученная вращением прямоугольника вокруг одной из его сторон.

Поверхность цилиндра состоит из *оснований цилиндра* – двух равных кругов, лежащих в параллельных плоскостях, и *боковой поверхности*.

Отрезок, с одним концом на окружности одного основания, с другим концом – на окружности другого основания, перпендикулярный плоскостям оснований, называется *образующей цилиндра*.

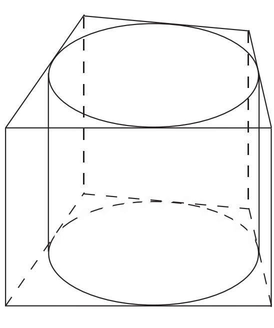
Высотой цилиндра называется расстояние между плоскостями оснований.

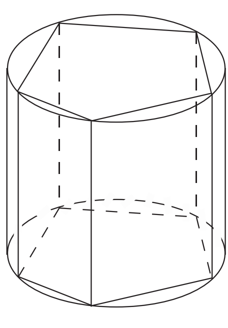
Осью цилиндра называется прямая, проходящая через центры оснований. Сечение цилиндра плоскостью, проходящей через ось, называется *осевым сечением*.

Плоскость, проходящая через образующую цилиндра и перпендикулярная осевому сечению, проходящему через эту образующую, называется *касательной плоскостью цилиндра*.

Цилиндр называется *вписанным в призму*, если его основания вписаны в основания призмы, и грани призмы касаются его боковой поверхности. В этом случае призма называется *описанной около цилиндра* (левый рисунок).

Цилиндр называется *описанным около призмы*, если его основания описаны около оснований призмы и ребра призмы являются его образующими. В этом случае призма называется *вписанной в цилиндр* (правый рисунок).





Основные утверждения

Площадь боковой поверхности: $S_{\text{бок}} = 2\pi RH.$

Объем цилиндра: $V = \pi R^2 H.$

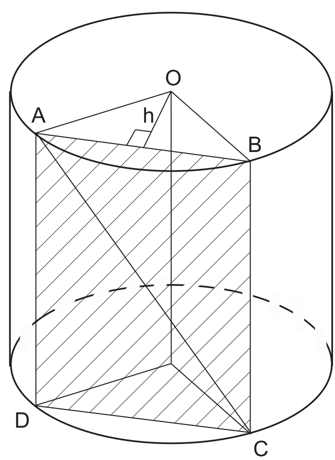
Здесь R – радиус основания цилиндра, H – высота цилиндра.

Напомним также, что

- сечением цилиндра плоскостью, параллельной оси цилиндра, является прямоугольник;
- плоскость, перпендикулярная оси цилиндра, пересекает его боковую поверхность по окружности, равной окружности основания.

Примеры решения задач

Пример 1. Плоскость, параллельная оси цилиндра, отсекает от окружности основания дугу 60°. Диагональ полученного сечения равна $2\sqrt{6}$ и удалена от оси цилиндра на расстояние $\sqrt{6}$. Найдите объем цилиндра.



Решение. Пусть данным сечением цилиндра является прямоугольник $ABCD$. Вычислим высоту цилиндра H и радиус основания R.

Диагональ сечения и ось цилиндра являются скрещивающимися прямыми, причем плоскость, содержащая диагональ, параллельна оси. Следовательно, расстояние между этими прямыми есть расстояние между плоскостью сечения и осью. Это расстояние равно длине перпендикуляра h, опущенного из центра основания O на хорду AB, следовательно, $h = \sqrt{6}$.

Так как мера дуги, соответствующей хорде AB, равна 60°, то треугольник ABO – равносторонний и $AB = R$. Высота треугольника

$$h = R \cdot \sin 60^\circ \quad \Longrightarrow \quad R = 2\sqrt{2}.$$

Теперь найдем высоту цилиндра из прямоугольного треугольника ABC:

$$BC = \sqrt{AC^2 - AB^2} = \sqrt{(2\sqrt{6})^2 - (2\sqrt{2})^2} = 4.$$

В результате объем цилиндра равен $V = \pi R^2 H = 32\pi$.

Ответ. 32π.

Задачи

1. Через образующую цилиндра проведены два сечения, одно из которых осевое, а второе параллельное оси цилиндра. Площади сечений равны 26 и 13. Найдите градусную меру угла между плоскостями сечений.

2. Через образующую цилиндра AB проведены два сечения: одно – по диаметру AM, другое – по хорде AD. Угол между плоскостями этих сечений равен $60°$. Площадь боковой поверхности цилиндра равна 60π. Найдите площадь того из данных сечений цилиндра, которое проходит через хорду AD.

3. Концы отрезка BC лежат на окружностях двух оснований цилиндра. Радиус основания цилиндра равен 25, длина отрезка BC равна $14\sqrt{2}$, а угол между прямой BC и плоскостью основания цилиндра равен $45°$. Найдите расстояние между осью цилиндра и параллельной ей плоскостью, проходящей через точки B и C.

4. Радиус основания цилиндра равен 6, а высота равна 2. Отрезки AB и CD – диаметры одного из оснований цилиндра, а отрезок AA' – его образующая. Известно, что $BC = 2\sqrt{21}$. Найдите синус угла между прямыми $A'C$ и BD.

5. Около правильной шестиугольной призмы описан цилиндр. Площадь боковой поверхности цилиндра равна $16\pi\sqrt{3}$. Расстояние между осью цилиндра и диагональю боковой грани призмы равно $2\sqrt{3}$. Найдите объем призмы.

6. В прямую призму, в основании которой лежит ромб с углом $45°$, вписан цилиндр. Расстояние между осью цилиндра и диагональю боковой грани призмы равно $5\sqrt{2}$. Найдите площадь полной поверхности цилиндра, если объем призмы равен 120.

7. В правильной призме $MNPM'N'P'$ сторона основания равна 12, а диагональ грани MN' образует с плоскостью основания угол $45°$. На сколько процентов объем описанного цилиндра больше объема вписанного цилиндра?

8. В правильной призме $MNPM'N'P'$ сторона основания равна 12, а диагональ грани MN' образует с плоскостью основания угол $45°$. Сколько процентов от площади боковой поверхности описанного цилиндра составляет площадь боковой поверхности вписанного цилиндра?

7.2. Конус

Теоретический материал

В этом разделе собраны задачи на вычисление элементов конуса и задачи, связанные с описанными и вписанными конусами. Приведем основные определения и теоремы.

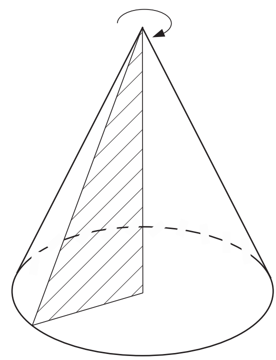
Основные определения

Конусом (точнее, прямым круговым конусом) называется тело, полученное вращением прямоугольного треугольника вокруг одного из катетов.

Поверхность конуса состоит из *основания конуса* (круга) и *боковой поверхности* (кругового сектора).

Отрезок с одним концом в вершине конуса, с другим концом – на окружности основания, называется *образующей конуса.*

Высотой конуса называется перпендикуляр, опущенный из вершины конуса на плоскость основания. Основание высоты прямого кругового конуса совпадает с центром основания.

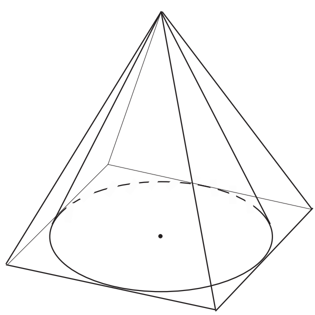


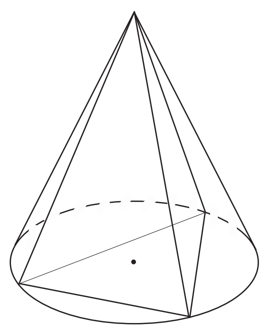
Осью конуса называется прямая, проходящая через вершину конуса и центр основания. Сечение конуса плоскостью, проходящей через ось, называется *осевым сечением.*

Плоскость, проходящая через образующую конуса и перпендикулярная осевому сечению, проходящему через эту образующую, называется *касательной плоскостью конуса.*

Конус называется *вписанным в пирамиду*, если его основание вписано в основание пирамиды и грани пирамиды касаются его боковой поверхности. В этом случае пирамида называется *описанной около конуса* (левый рисунок).

Конус называется *описанным около пирамиды*, если его основание описано около основания пирамиды и боковые ребра пирамиды являются его образующими. В этом случае пирамида называется *вписанной в конус* (правый рисунок).





Плоскость, перпендикулярная оси конуса, отсекает от него меньший конус. Оставшаяся часть называется *усеченным конусом.*

Основные утверждения

Площадь боковой поверхности: $S_{\text{бок}} = \pi R L.$

Объем конуса: $V = \dfrac{1}{3}\pi R^2 H.$

Здесь R – радиус основания, L – образующая, H – высота конуса.

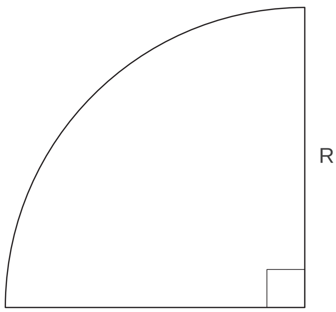
Напомним также, что

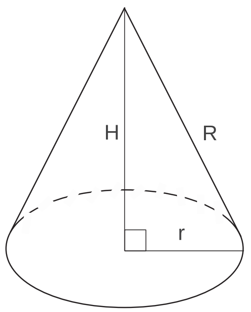
- сечением конуса плоскостью, проходящей через вершину конуса, является равнобедренный треугольник;
- плоскость, перпендикулярная оси конуса, пересекает его боковую поверхность по окружности.

Примеры решения задач

П р и м е р 1. Длина дуги развертки боковой поверхности конуса равна $4\pi\sqrt{15}$, а угол развертки равен 90°. Найдите объем конуса.

Р е ш е н и е. Развертка боковой поверхности конуса представляет собой четверть круга радиуса R, равного образующей исходного конуса.





Так как по условию длина дуги развертки равна $4\pi\sqrt{15}$, то

$$4\pi\sqrt{15} = \frac{2\pi R}{4} \quad \Longrightarrow \quad R = 8\sqrt{15}.$$

Найдем радиус основания конуса по длине окружности основания

$$4\pi\sqrt{15} = 2\pi r \quad \Longrightarrow \quad r = 2\sqrt{15}.$$

Теперь по теореме Пифагора вычислим высоту конуса

$$H = \sqrt{R^2 - r^2} = 30.$$

В результате объем конуса равен $V = \dfrac{1}{3}\pi r^2 H = 600\pi$.

О т в е т. 600π.

Задачи

1. В правильной четырехугольной пирамиде сторона основания равна 6, а высота равна 2. Найдите объем (V) конуса, вписанного в эту пирамиду. В ответе запишите V/π.

2. В правильной треугольной пирамиде сторона основания равна $4\sqrt{3}$, а высота равна 3. Найдите площадь боковой поверхности (S) конуса, описанного около этой пирамиды. В ответе запишите S/π.

3. Угол между образующими CA и CB конуса равен 60°, высота конуса равна 4, радиус основания равен $\dfrac{4\sqrt{15}}{3}$. Найдите градусную меру угла между плоскостью ABC и плоскостью основания конуса.

4. В основании конуса проведена хорда. Через данную хорду и вершину конуса C проведена плоскость так, что угол при вершине C, образовавшегося в сечении треугольника, равен 60°. Найдите расстояние от центра основания конуса O до данной плоскости, если высота конуса равна 2, а образующая равна $8/3$.

5. Отношение площади боковой поверхности конуса к его объему равно 1,5. Найдите высоту конуса, если его образующая равна диаметру основания.

6. Расстояние от центра основания конуса до его образующей равно 3. Образующая наклонена к плоскости основания под углом 30°. Найдите объем конуса (V). В ответе запишите $\dfrac{V}{\pi\sqrt{3}}$.

7. Длина дуги развертки боковой поверхности конуса равна 6π, а образующая конуса равна 5. Найдите объем конуса.

8. Образующая усеченного конуса равна 2. Диагональ осевого сечения перпендикулярна боковой стороне сечения и наклонена к плоскости основания под углом 30°. Найдите площадь боковой поверхности усеченного конуса.

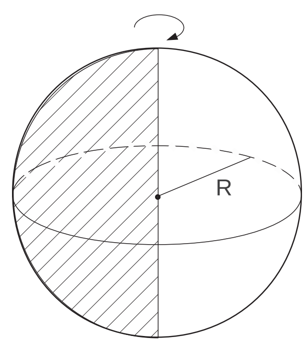
7.3. Шар

Теоретический материал

В этом разделе собраны задачи на вычисление элементов шара и задачи, связанные с описанными и вписанными шарами. Приведем основные определения и теоремы.

Основные определения

Шаром называется тело, состоящее из всех точек пространства, находящихся от данной точки (*центр шара*) на расстоянии, не большем данного (*радиус шара*).



Замечание. Шар также, как цилиндр и конус, является телом вращения. Он получается при вращении полукруга вокруг его диаметра.

Граница шара называется *шаровой поверхностью* или *сферой.*

Плоскость, проходящая через точку, лежащую на сфере, и перпендикулярная радиусу, проведенному в эту точку, называется *касательной плоскостью.*

Прямая, проходящая через точку сферы перпендикулярно к радиусу, проведенному в эту точку, называется *касательной прямой* или просто *касательной.*

Многогранник называется *вписанным в шар*, если все его вершины лежат на поверхности шара. В этом случае шар называется *описанным около многогранника.*

Многогранник называется *описанным около шара*, если все его грани касаются шара. В этом случае шар называется *вписанным в многогранник.*

Основные теоремы

Касательная плоскость имеет с шаром только одну общую точку – точку касания. Через любую точку сферы проходит бесконечное число касательных, причем все они лежат в касательной плоскости шара.

Любая диаметральная плоскость (плоскость, проходящая через диаметр) является плоскостью симметрии шара. Центр шара является его центром симметрии.

Площадь поверхности сферы: $S = 4\pi R^2$, где R – радиус сферы.

Объем шара: $V = \dfrac{4}{3}\pi R^3$.

Центром шара, вписанного в многогранник, является точка пересечения плоскостей, делящих двугранные углы многогранника пополам.

Если многогранник вписан в шар, то вокруг каждой из его граней можно описать окружность. Центр описанного шара есть точка пересечения перпендикуляров к граням, проведенных через центры этих окружностей.

Для каждого тетраэдра существует вписанный и описанный шар, причем

$$V = \frac{1}{3}Sr,$$

где V – объем тетраэдра, S – площадь его полной поверхности, r – радиус вписанного шара.

Вокруг любой правильной пирамиды можно описать шар, причем центр описанного шара будет лежать на высоте пирамиды.

В любую правильную пирамиду можно вписать шар. Причем центр вписанного шара будет лежать на высоте пирамиды, а точки касания шара с боковыми гранями – на соответствующих апофемах.

Вокруг любой правильной призмы можно описать шар, причем центром этого шара будет середина высоты, проведенной через центры оснований призмы.

Сечением шара плоскостью является круг. Его центр есть основание перпендикуляра, опущенного из центра шара на секущую плоскость.

Линия пересечения двух сфер есть окружность.

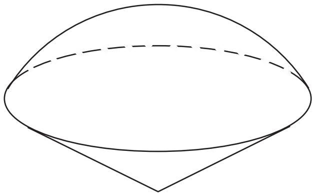
Части шара

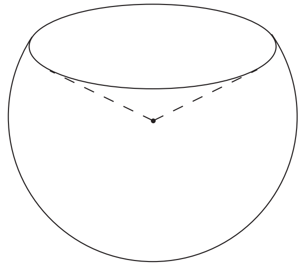
Шаровым сегментом называется часть шара, отсекаемая от него плоскостью.

Шаровым слоем называется часть шара, расположенная между двумя параллельными плоскостями, пересекающими шар.

Шаровым сектором называется тело, ограниченное сферической поверхностью шарового сегмента и боковой поверхностью конуса, который имеет общее основание с сегментом и вершину в центре шара.

З а м е ч а н и е. Шаровой сектор получается из шарового сегмента и конуса следующим образом. Если шаровой сегмент меньше полушара, то он дополняется конусом, у которого вершина в центре шара, а основанием является основание сегмента. Если же сегмент больше полушара, то конус из него удаляется.





Основные формулы для шарового сегмента:

- площадь боковой поверхности: $S = 2\pi RH$;
- объем: $V = \pi H^2 \left(R - \dfrac{H}{3} \right)$,
  где R – радиус шара, H – высота сегмента.

Основные формулы для шарового слоя:

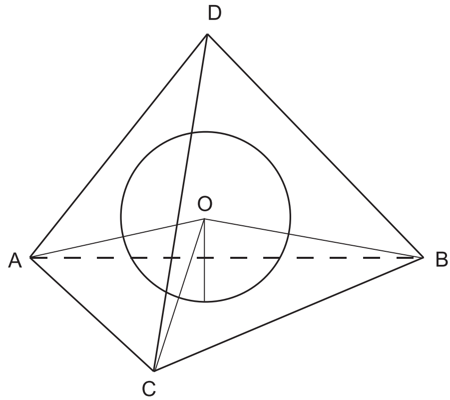
- площадь боковой поверхности: $S = 2\pi RH$;
- объем: $V = \dfrac{\pi H}{6} \left(3R_1^2 + 3R_2^2 + H^2 \right)$,
  где R – радиус шара, R_1 и R_2 – радиусы оснований, H – высота слоя.

Основные формулы для шарового сектора:

- площадь боковой поверхности: $S = 2\pi RH$;
- объем: $V = \dfrac{2}{3}\pi R^2 H$,
  где R – радиус шара, H – высота сектора.

Примеры решения задач

Пример 1. Докажите, что объем тетраэдра равен одной трети произведения площади его полной поверхности на радиус вписанного шара.



Решение. Рассмотрим произвольный тетраэдр $ABCD$ и шар с центром O, вписанный в него. Объем данного тетраэдра складывается из объемом четырех тетраэдров, основаниями которых являются грани исходного тетраэдра, а вершиной – точка O.

Расстояния от точки O до граней исходного тетраэдра равны радиусу шара, следовательно,

$$V_{ABCD} = V_{ABCO} + V_{ABDO} + V_{BCDO} + V_{ACDO} \quad \Longrightarrow$$

$$\Longrightarrow \quad V = \frac{1}{3}\left(S_{ABC} + S_{ABD} + S_{BCD} + S_{ACD}\right) r = \frac{1}{3} Sr,$$

где r – радиус шара, S – площадь полной поверхности исходного тетраэдра.

Задачи

1. Сфера проходит через вершины равнобедренного треугольника с основанием 4 и углом при вершине $\arcsin(1/3)$. Расстояние от центра сферы до плоскости треугольника равно 8. Найдите радиус сферы.

2. Все стороны ромба с диагоналями 30 и 40 касаются поверхности шара радиуса 20. Найдите расстояние от центра шара до плоскости ромба.

3. В правильной четырехугольной пирамиде сторона основания равна 4, а высота равна 2. Найдите радиус описанного шара.

4. Найдите радиус шара, вписанного в правильную треугольную пирамиду, с высотой, равной 8, и апофемой, равной 10.

5. Угол наклона боковой грани к плоскости основания правильной треугольной пирамиды равен 60°. Радиус шара, описанного около пирамиды, равен 35. Найдите радиус вписанного шара.

6. В треугольной пирамиде с равными боковыми ребрами известны длины сторон основания 6, 8, 10 и длина высоты 1. Найдите радиус описанного шара.

7. Около правильной призмы $MNPM'N'P'$ описан шар. Найдите площадь его поверхности (S), если сторона основания призмы равна 12, а диагональ грани MN' образует с плоскостью основания угол 45°. В ответе запишите S/π.

8. Около пирамиды, в основании которой лежит правильный треугольник со стороной, равной 3, описан шар. Найдите радиус шара, если известно, что одно из боковых ребер пирамиды перпендикулярно ее основанию и равно 2.

9. В шар радиуса $\sqrt{11}$ вписана правильная треугольная призма $ABCA'B'C'$. Прямая AB' образует с плоскостью ACC' угол 45°. Найдите объем призмы.

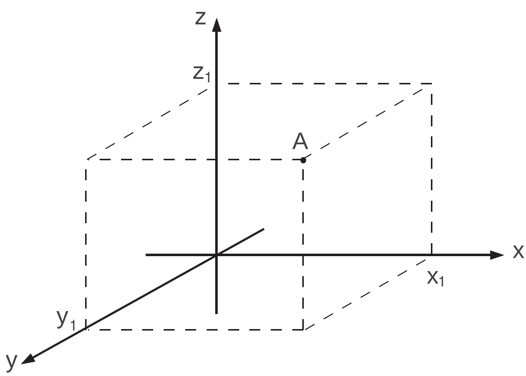
8. Координаты и векторы

8.1. Декартовы координаты и векторы в пространстве

Теоретический материал

Напомним основные сведения, связанные с декартовыми координатами и векторами в пространстве.

Прямоугольной декартовой системой координат в пространстве называются три взаимно перпендикулярные координатные прямые x, y и z, пересекающиеся в одной точке. Точка пересечения координатных прямых называется *началом координат* и является начальной точкой для каждой из них. Плоскость, проходящая через прямые x и y, называется *координатной плоскостью* xy. Две другие плоскости называются соответственно *координатными плоскостями* xz *и* yz.



Каждой точке пространства ставится в соответствие тройка чисел – координаты прямоугольных проекций этой точки на оси x, y и z соответственно. Обозначение: $A(x_1; y_1; z_1)$ или $(x_1; y_1; z_1)$.

Расстояние между двумя точками $A(x_1; y_1; z_1)$ и $B(x_2; y_2; z_2)$ равно

$$d = \sqrt{(x_1 - x_2)^2 + (y_1 - y_2)^2 + (z_1 - z_2)^2}.$$

Координаты середины отрезка AB равны $\left(\frac{x_1 + x_2}{2}; \frac{y_1 + y_2}{2}; \frac{z_1 + z_2}{2}\right)$.

Координатами вектора $\overline{a}$ с началом в точке $A(x_1; y_1; z_1)$ и концом в точке $B(x_2; y_2; z_2)$ называются числа $a_1 = x_2 - x_1$, $a_2 = y_2 - y_1$, $a_3 = z_2 - z_1$. Обозначение: $\overline{a}(a_1; a_2; a_3)$ или $\overline{(a_1; a_2; a_3)}$.

Любой вектор в пространстве можно представить в виде линейной комбинации

$$\overline{a} = a_1\overline{e}_1 + a_2\overline{e}_2 + a_3\overline{e}_3,$$

где $\overline{e}_1(1; 0; 0)$, $\overline{e}_2(0; 1; 0)$, $\overline{e}_3(0; 0; 1)$ – *координатные орты*.

Сумма двух векторов в пространстве определяется аналогично сумме двух векторов на плоскости, то есть

$$\overline{(a_1;a_2;a_3)} + \overline{(b_1;b_2;b_3)} = \overline{(a_1+b_1;a_2+b_2;a_3+b_3)},$$

и обладает теми же свойствами:

$$\overline{a} + \overline{0} = \overline{a}, \qquad \overline{a} + \overline{b} = \overline{b} + \overline{a}, \quad \overline{a} + (\overline{b} + \overline{c}) = (\overline{a} + \overline{b}) + \overline{c}.$$

Произведение вектора на число в пространстве определяется аналогично произведению на плоскости, то есть

$$\lambda\overline{(a_1;a_2;a_3)} = \overline{(a_1;a_2;a_3)}\lambda = \overline{(\lambda a_1;\lambda a_2;\lambda a_3)},$$

и обладает теми же свойствами:

$$(\lambda_1+\lambda_2)\overline{a} = \lambda_1\overline{a} + \lambda_2\overline{a}, \qquad \lambda(\overline{a}+\overline{b}) = \lambda\overline{a} + \lambda\overline{b}, \qquad |\lambda\overline{a}| = |\lambda||\overline{a}|.$$

Скалярное произведение векторов определяется аналогично произведению векторов на плоскости, то есть

$$\overline{a}\cdot\overline{b} = a_1b_1 + a_2b_2 + a_3b_3,$$

и обладает теми же свойствами:

$$|\overline{a}| = \sqrt{\overline{a}\cdot\overline{a}}, \qquad (\overline{a}+\overline{b})\overline{c} = \overline{ac} + \overline{bc}, \qquad (\lambda\overline{a})\overline{b} = \overline{a}(\lambda\overline{b}) = \lambda\overline{a}\overline{b}, \qquad \overline{a}\cdot\overline{b} = |\overline{a}||\overline{b}|\cos\varphi.$$

Уравнение плоскости

Любая плоскость в декартовых координатах x, y, z имеет уравнение вида

$$ax + by + cz + d = 0.$$

Геометрический смысл коэффициентов уравнения плоскости: коэффициенты a, b, c в уравнении плоскости являются координатами вектора, перпендикулярного этой плоскости.

Замечание. Любую прямую в пространстве можно задать двумя линейными уравнениями – уравнениями плоскостей, проходящих через эту прямую.

Примеры решения задач

Пример 1. Докажите, что четырехугольник $ABCD$ с вершинами $A(3;3;4)$, $B(0;4;3)$, $C(1;3;2)$, $D(4;2;3)$ является параллелограммом.

Решение. Покажем, что отрезки AC и BD пересекаются и точкой пересечения делятся пополам.

Для этого найдем координаты точек $O(x_1;y_1;z_1)$ и $O'(x_2;y_2;z_2)$ – середин отрезков AC и BD соответственно:

$$x_1 = \frac{3+1}{2} = 2, \quad y_1 = \frac{3+3}{2} = 3, \quad z_1 = \frac{4+2}{2} = 3,$$

$$x_2 = \frac{0+4}{2} = 2, \quad y_2 = \frac{4+2}{2} = 3, \quad z_1 = \frac{3+3}{2} = 3.$$

Так как координаты середин отрезков совпадают, то точка $O = O'$ является точкой пересечения этих отрезков. Следовательно, точки A, B, C, D принадлежат одной плоскости и диагонали четырехугольника $ABCD$ делятся точкой O пополам. Значит этот четырехугольник параллелограмм.

Пример 2. Составьте уравнение плоскости, которая проходит через точку A и перпендикулярна прямой AB, где $A(1; -2; 2)$, $B(3; 1; 3)$.

Решение. Искомая плоскость должна быть перпендикулярна вектору $\overline{AB} = (3-1; 1-(-2); 3-2) = (2; 3; 1)$, следовательно, ее уравнение имеет вид

$$2x + 3y + z + d = 0.$$

Значение коэффициента d можно определить, используя условие принадлежности точки $A(1; -2; 2)$ этой плоскости:

$$2 \cdot 1 + 3 \cdot (-2) + 2 + d = 0 \quad \Longrightarrow \quad d = 2.$$

Ответ. $2x + 3y + z + 2 = 0$.

Задачи

1. Найдите координаты вершины D параллелограмма $ABCD$, если координаты трех остальных его вершин известны: $A(2; -2; 0)$, $B(1; 0; -1)$, $C(0; -1; 1)$.
2. Даны три точки: $A(-1; 1; 0)$, $B(0; -1; 3)$, $C(2; 1; 1)$. Найдите косинус угла C треугольника ABC.
3. Докажите, что четырехугольник $ABCD$ с вершинами $A(-2; 3; 0)$, $B(-1; 1; 0)$, $C(0; 1; 2)$, $D(-1; 3; 2)$ является ромбом.
4. При каком значении n векторы $\overline{a}(n; 2; 4)$ и $\overline{b}(n; -2n; 1)$ перпендикулярны?
5. При каких значениях m и n векторы $\overline{a}(3; n; 2)$ и $\overline{b}(m; 2; 5)$ коллинеарны?
6. Векторы $\overline{a}$, $\overline{b}$, $\overline{c}$ единичной длины образуют попарно углы 60°. Найдите угол между векторами $\overline{a}$ и $\overline{b} - \overline{c}$.
7. Векторы $\overline{a}$, $\overline{b}$, $\overline{c}$ единичной длины образуют попарно углы 60°. Найдите угол между векторами $\overline{a}$ и $\overline{b} + \overline{c}$.
8. Докажите, что если $\overline{a}$ и $\overline{b}$ – единичные неколлинеарные векторы, то векторы $\overline{a} + \overline{b}$ и $\overline{a} - \overline{b}$ перпендикулярны.
9. Векторы $\overline{a} + \overline{b}$ и $\overline{a} - \overline{b}$ перпендикулярны. Докажите, что $|\overline{a}| = |\overline{b}|$.
10. Вычислите скалярное произведение векторов $\overline{a}$ и $\overline{b}$, если $\overline{a} = 3\overline{p} + 2\overline{q}$, $\overline{b} = \overline{p} - 4\overline{q}$, где $\overline{p}$ и $\overline{q}$ единичные перпендикулярные векторы.
11. Плоскость задана уравнением $3x - y + 2z = 2$. Укажите какой-нибудь вектор, параллельный плоскости.

12. Прямая является пересечением плоскостей $3x - y + 2z = 2$ и $x + y + z = 0$. Укажите какой-нибудь вектор, параллельный этой прямой.

13. Дана точка $A(2; 0; -1)$. Найдите уравнение плоскости, проходящей через начало координат O и перпендикулярной прямой OA.

14. Найдите отрезки, которые плоскость $ax + by + cz + d = 0$ отсекает на осях координат, если a, b, c, d отличны от нуля.

15. Найдите точку пересечения трех плоскостей, заданных уравнениями

$$x - y = 1, \quad x + y - z = 3, \quad x + z = 2.$$

16. Докажите, что плоскости, заданные уравнениями

$$x - y + 2z = 1, \quad 2x - 3y + z + 1 = 0, \quad x + 5z - 1 = 0,$$

не имеют ни одной общей точки.

17. Составьте уравнение плоскости, которая проходит через точку A и перпендикулярна прямой AB, где $A(2; 0; -1)$, $B(3; -2; 1)$.

Ответы

АЛГЕБРА

1.1.

1. 0.
2. -6.
3. $\sqrt{a}+9\sqrt{b}$.
4. $\sqrt[3]{a^2}-3\sqrt[3]{ab}+9\sqrt[3]{b^2}$.
5. 2 при $a\geq 0,\ b\geq 0,\ 4a\neq b$.
6. $2\sqrt{2}$, если $a>0,\ b>0,\ 2a\neq b$.
7. 180.
8. 2.
9. -1.
10. 47.
11. 1.
12. 2.
13. 4.
14. $0,01$.

1.2.

1. Второе число больше.
2. Второе число меньше.
3. Первое число больше.
4. $3^{400}>4^{300}$.
5. $\sqrt{7}+\sqrt{10}\ <\ \sqrt{3}+\sqrt{19}$.
6. Второе выражение больше первого.
7. $\sqrt[3]{38+17\sqrt{5}}<\sqrt{9+4\sqrt{5}}+\dfrac{11}{1000}$.
8. $33^{44}>44^{33}$.
9. $\pi<\sqrt{10}$.
10. $\left(\dfrac{1}{6}\right)^{1/6}\ >\ \left(\dfrac{1}{5}\right)^{1/5}$.

1.3.

1. 1.
2. $\left(-\infty;\dfrac{3}{2}\right]$.
3. $(-\infty;-2)\cup(2;+\infty)$.
4. $\left(-\infty;\dfrac{4}{7}\right]$.
5. $\dfrac{2}{3};\ 2$.
6. $-25;\ 3$.
7. $\left[-\dfrac{7}{2};\ \dfrac{15}{2}\right]$.
8. $-\dfrac{17}{5};\ \dfrac{11}{3}$.
9. $\left(\dfrac{3}{7};\dfrac{11}{7}\right)$.
10. $(2;+\infty)$.
11. а) Если $a<-1$ или $a>1$, то $x=4$; если $a=-1$, то $x\geq 4$; если $a=1$, то $-2\leq x\leq 4$; если $-1<a<1$, то $x=4$ или $x=\dfrac{4(a-2)}{a+1}$.

    б) Если $a<-1$ или $a>1$, то $x=1$; если $a\in(-1;1)$, то $x=1$ и $x=\dfrac{a+7}{a-1}$; если $a=-1$, то $x\in[-3;1]$; если $a=1$, то $x\in[1;+\infty)$.
12. $\left[\dfrac{4}{3};2\right]$.

1.4.

1. $\pm 1;\ \pm\dfrac{1}{\sqrt{5}}$.
2. $4;\ \dfrac{\sqrt{17}+1}{2}$.
3. $2;\ 3$.
4. $1;\ 13$.
5. $(-\infty;-3]\cup[3;+\infty)$.
6. $(-5;3+\sqrt{8})$.
7. $[1;2]$.
8. Нет.
9. $\left(-2;-\dfrac{1}{\sqrt{3}}\right)\cup\left(\dfrac{1}{\sqrt{3}};2\right)$.
10. $\pm\sqrt{\dfrac{3}{2}};\ \pm\sqrt{\dfrac{5}{2}}$.
11. $[-3;-1)$.
12. ± 5.
13. $x_1=5,\ x_2=7$ или $x_1=-5$, $x_2=-7$.
14. $(p^2+2q)^2-2q^2$.
15. $(2;-8;8)$.
16. $\left(\dfrac{9-\sqrt{17}}{16};\dfrac{1}{3}\right)\cup\left(\dfrac{1}{3};\dfrac{9+\sqrt{17}}{16}\right)$.

2.1.

1. $\left(-4;-\dfrac{3}{4}\right]\cup[2;+\infty)$.
2. $(0;0,2]$.
3. $(-\infty;-1]\cup[0;5)$.
4. $(-\infty;1)\cup\{2\}$.
5. $(-1;0)\cup(2;4)$.
6. $(-\infty;1]\cup\left(\dfrac{3}{2};+\infty\right)$.
7. $(-\infty;-5)\cup[1;2]$.
8. $(-\infty;2)\cup\left(\dfrac{5+\sqrt{17}}{4};+\infty\right)$.
9. $[-2;-1)\cup(-1;+\infty)$.
10. $(-\infty;-2]\cup\left[\dfrac{1}{2};1\right)\cup\left(1;\dfrac{\sqrt{73}-3}{4}\right]$.
11. $(-\infty;1]\cup(1996;+\infty)$.
12. $(-\infty;-9)\cup\left(\dfrac{2}{3};1\right)\cup\left[\dfrac{11}{2};+\infty\right)$.
13. $(-6;-4)\cup(-4;1)$.
14. $\left(\dfrac{-9-\sqrt{57}}{4};-2\right)\cup(-2;-1)\cup\left(\dfrac{3}{2};+\infty\right)$.
15. $(-\infty;-1)\cup\left[-\dfrac{1}{3};1\right)\cup(1;+\infty)$.
16. $[0;100)\cup(400;+\infty)$.
17. $(-5;-2)\cup(-1;+\infty)$.
18. $-1;\ 0$.
19. $\left(-2;-\dfrac{3}{2}\right)\cup(1;+\infty)$.
20. $(-\infty;2)\cup\{3\}\cup(4;+\infty)$.
21. $(-\infty;-4)\cup\{0\}\cup\{2\}\cup(4;+\infty)$.
22. $(-\infty;-2)\cup(1;+\infty)$.
23. Если $a=0$, то решений нет; если $a\neq 0$, то $x=\dfrac{5a}{3}$.

2.2.

1. $(3;1),\ \left(\dfrac{5}{3};\dfrac{11}{3}\right)$.
2. $(9;2)$.
3. $(5;-2)$.
4. $(1;-1),\ \left(-\dfrac{1}{5};\dfrac{7}{5}\right)$.
5. $\pm\sqrt{2}$.
6. -4.
7. $\mathbb{R}\backslash\{0\}$.
8. $-\dfrac{3}{4};\ 0;\ \dfrac{2}{9}$.

2.3.

1. $(-4;-3]\cup[3;5)$.
2. $(1;3)$.
3. $[-3;0]$.
4. -3.
5. 18.
6. $\dfrac{19+\sqrt{137}}{8}$.
7. $\dfrac{13-\sqrt{21}}{2}$.
8. $\dfrac{15+\sqrt{5}}{10}$.
9. 0.
10. 2.
11. $1;\ 4$.
12. $2+\sqrt{3}$.
13. -1.
14. $\left[-\dfrac{3}{2};3\right]$.
15. $(4;+\infty)$.
16. $(-\infty;-2]$.
17. $\left(\dfrac{21-\sqrt{89}}{8};+\infty\right)$.
18. $\left[-6;\dfrac{11+\sqrt{167}}{4}\right)$.
19. $(-\infty;-5]\cup\left[1;\dfrac{8+\sqrt{22}}{3}\right)$.
20. $\{-21\}\cup[0;21]$.
21. $\{1\}\cup[2;+\infty)$.
22. $[1;4]$.
23. $[-1;0)$.
24. $-\sqrt{3}$.
25. $\dfrac{3+\sqrt{65}}{2}$.
26. 0.
27. 3.

28. $7/9$.

29. $\left[0; \dfrac{3-\sqrt{5}}{6}\right)$.

30. 1.

2.4.

1. 3.

2. 0.

3. $\pm\dfrac{1+\sqrt{3}}{2}$.

4. $\left(\dfrac{4}{7}; \dfrac{37+\sqrt{69}}{50}\right)$.

5. $\sqrt{5}$.

6. $\dfrac{\sqrt{57}-1}{4}$.

7. $-\dfrac{15}{4}; -\dfrac{7}{4}; -3$.

8. $\left(-\infty; \dfrac{1-\sqrt{57}}{2}\right] \bigcup \left(\dfrac{38}{9}; +\infty\right)$.

9. $\left[3; \dfrac{11+\sqrt{61}}{2}\right]$.

10. $\{3\} \cup [4;7]$.

11. $(-\infty; 0] \cup \left[\dfrac{7}{8}; +\infty\right)$.

12. $(-\infty; -2] \cup \left[-1; \dfrac{\sqrt{13}-1}{6}\right)$.

13. $-\sqrt{2+\sqrt{5}}$.

14. $\left[-5+\sqrt{23}; -\dfrac{1}{8}\right] \cup \left[\dfrac{3}{8}; 3-\sqrt{5}\right] \cup$
$\cup\, [3+\sqrt{5}; +\infty)$.

15. $[-2;-1] \cup \{2\}$.

16. $[1;3)$.

17. $\left[-\dfrac{15}{4}; -\dfrac{3}{2}\right) \bigcup \left(-\dfrac{3}{2}; \dfrac{5}{2}\right]$.

18. $\left(-\dfrac{1}{3}; -\dfrac{1}{8}\right)$.

19. $[-1-2\sqrt{13}; -5) \cup (1; 2\sqrt{13}-1]$.

20. $\left(-\infty; \dfrac{-31-\sqrt{265}}{6}\right) \cup (-5; +\infty)$.

21. $\left(-\dfrac{15}{4}; -\dfrac{36}{25}\right)$.

22. $\left(-7; \dfrac{28}{5}\right)$, $\left(1; -\dfrac{4}{5}\right)$, $(1;0)$.

23. $(-\infty; 2) \cup \left(\dfrac{3+\sqrt{5}}{2}; 3\right)$.

24. $0; \pm 1$.

25. $[-2;-1) \cup [0;1]$.

26. $\left(\dfrac{3}{4}; 7\right]$.

27. а) При $a \le -1$ $\ x \in [a; -a]$;
при $a \in (-1; -1/2)$
$x \in \left[-\sqrt{-2a-1}; \sqrt{-2a-1}\right]$;
при $a = -1/2$ $\ x = 0$;
при $a > -1/2$ решений нет.
б) При $a \ge 2$ $\ x \in [-a; a]$;
при $a \in [1;2)$
$x \in \left[-2\sqrt{a-1}; 2\sqrt{a-1}\right]$;
при $a < 1$ решений нет.

28. а) Если $a < 0$, то решений нет;
если $a = 0$, то $x > 0$;
если $a > 0$, то $x \in \left[-\dfrac{a}{3}; 0\right) \cup (8a; +\infty)$.
б) Если $a < 0$, то решений нет;
если $a = 0$, то $x > 0$;
если $a > 0$, то $x \in \left[-\dfrac{4a}{3}; -a\right) \cup$
$(0; +\infty)$.

29. Если $b \le -1$, то $x \in (-\infty; -1] \cup [1; +\infty)$;
если $-1 < b < 0$, то
$x \in \left[-\dfrac{1}{\sqrt{1-b^2}}; -1\right] \cup [1; +\infty)$;
если $b = 0$, то $x \in \{-1\} \cup [1; +\infty)$.

3.1.

1. $\operatorname{ctg}^2\alpha$.

2. $1,96$.

3. $-\dfrac{\sqrt{19}}{3}$.

4. $\operatorname{ctg}^2\alpha$.

5. 4.

6. $\dfrac{7}{9}$.

7. $\dfrac{3}{5}$.

8. $\dfrac{120}{119}$.

9. $-\dfrac{2}{3}; -\sqrt{5}$.

10. $-\dfrac{1}{\sqrt{10}}$; $\left|\cos\dfrac{\alpha}{2}\right|$.

3.2.

1. $(-1)^m\dfrac{\pi}{12}+\dfrac{\pi}{4}m,\ m\in\mathbb{Z}.$
2. $1.$
3. $-2\pi.$
4. $\dfrac{\pi}{6}+\dfrac{2\pi n}{3},\ n\in\mathbb{Z}.$
5. $(-1)^n\dfrac{\pi}{4}+\pi n,\ n\in\mathbb{Z}.$
6. $2\pi n,\ n\in\mathbb{Z}.$
7. $-\dfrac{\pi}{6}+\dfrac{2\pi n}{3},\ n\in\mathbb{Z}.$
8. $\dfrac{(-1)^n}{3}\arcsin\dfrac{\sqrt{29}-3}{8}+\dfrac{\pi n}{3},\ n\in\mathbb{Z}.$
9. $(-1)^{n+1}\dfrac{\pi}{6}+\pi n,\ n\in\mathbb{Z}.$
10. $(-1)^n\dfrac{\pi}{12}+\dfrac{\pi n}{2},\ n\in\mathbb{Z}.$
11. $(-1)^n\arcsin\dfrac{4\sqrt{3}}{7}+\pi n,\ n\in\mathbb{Z}.$
12. $\pm\dfrac{\pi}{3}+2\pi k,\ k\in\mathbb{Z}.$
13. $\pi n,\ (-1)^m\dfrac{\pi}{6}+\pi m;\ n,m\in\mathbb{Z}.$
14. $\pi+2\pi n,\ \ 2(-1)^m\arcsin\dfrac{1}{\sqrt{5}}+2\pi m;$ $n,m\in\mathbb{Z}.$
15. $4(-1)^k\arcsin\dfrac{3\sqrt{3}-5}{2}+4\pi k,$ $2\pi+4\pi n;\ k,n\in\mathbb{Z}.$
16. $\dfrac{\pi}{12}+\dfrac{\pi n}{3};\ \dfrac{1}{3}\operatorname{arcctg}6+\dfrac{\pi m}{3};\ n,m\in\mathbb{Z}.$
17. $\pm\dfrac{1}{2}\arccos\dfrac{17-\sqrt{385}}{16}+\pi n,\ n\in\mathbb{Z}.$
18. $\pm\sqrt{-\dfrac{5\pi}{6}+2\pi k},\ \pm\sqrt{\dfrac{5\pi}{6}+2\pi n};$ $k\in\mathbb{N},\ n\in\mathbb{N}_0.$
19. $\dfrac{-9\pm\sqrt{2n+\dfrac{1}{2}}}{13},\ n\in\mathbb{N}_0.$

3.3.

1. $\dfrac{2\pi}{3}m,\ m\in\mathbb{Z}.$
2. $(-1)^{k+1}\dfrac{\pi}{6}+\pi k,\ k\in\mathbb{Z}.$
3. $\dfrac{\pi}{2}+\pi n,\ \dfrac{\pi}{4}+\dfrac{\pi m}{2};\ n,m\in\mathbb{Z}.$
4. $\pi n,\ \dfrac{\pi}{4}+\dfrac{\pi m}{2};\ n,m\in\mathbb{Z}.$
5. $\pi n,\ (-1)^{m+1}\dfrac{\pi}{32}+\dfrac{\pi m}{8};\ n,\ m\in\mathbb{Z}.$
6. $\pm\dfrac{\pi}{6}+\pi n,\ \dfrac{\pi}{4}+\dfrac{\pi m}{2};\ n,\ m\in\mathbb{Z}.$
7. $\dfrac{\pi}{4}+\dfrac{\pi n}{2};\ \dfrac{1}{2}(-1)^m\arcsin\dfrac{3}{4}+\dfrac{\pi m}{2};$ $n,\ m\in\mathbb{Z}.$
8. $\dfrac{\pi}{8}+\dfrac{\pi n}{4},\ (-1)^m\dfrac{\pi}{60}+\dfrac{\pi m}{10};\quad n,m\in\mathbb{Z}.$
9. $\dfrac{2\pi n}{7},\ \dfrac{2\pi m}{5},\ \pi k;\ \ n,m,k\in\mathbb{Z}.$
10. $\pi n,\ \ \pm\dfrac{\pi}{3}+2\pi m;\ n,m\in\mathbb{Z}.$
11. $\dfrac{\pi}{10}+\dfrac{\pi n}{5},\ \pm\dfrac{\pi}{6}+\pi m;\ n,\ m\in\mathbb{Z}.$
12. $\dfrac{\pi n}{3},\ \pm\dfrac{5\pi}{12}+\pi m;\ n,m\in\mathbb{Z}.$
13. $(-1)^n\dfrac{\pi}{6}+\pi n,\ n\in\mathbb{Z}.$
14. $\pm\dfrac{5\pi}{12}+\pi n,\ n\in\mathbb{Z}.$
15. $\dfrac{\pi n}{2},\ \pm\dfrac{\pi}{6}+\pi m;\ \ n,\ m\in\mathbb{Z}.$
16. $2\pi n,\ n\in\mathbb{Z}.$
17. $\dfrac{3\sqrt{3}-4}{10}.$
18. $1+\dfrac{2\pi n}{5},\ \dfrac{\pi}{5}-1+\dfrac{2\pi m}{5};\quad n,m\in\mathbb{Z};$ или в другой форме записи $(-1)^k\left(1-\dfrac{2\pi}{5}\right)+\dfrac{\pi k}{5},\quad k\in\mathbb{Z}.$
19. $-\dfrac{5}{6}+\dfrac{\pi m}{3},\ \dfrac{5}{4}+\dfrac{\pi n}{2};\ m,n\in\mathbb{Z}.$
20. $-\dfrac{5\pi}{12}+2\pi n,\ \dfrac{11\pi}{12}+2\pi m;\ \ n,m\in\mathbb{Z}.$
21. $\dfrac{4}{5}.$

3.4.

1. $\dfrac{5\pi}{6};\ \dfrac{7\pi}{6}.$
2. $\dfrac{\pi}{3}+2\pi n,\ n\in\mathbb{Z}.$
3. Один.
4. $-\dfrac{4\pi}{3};-\pi.$
5. $\pm\arccos\dfrac{\sqrt{2}-1}{2}+\pi n,\ n\in\mathbb{Z}.$
6. $\pm\arcsin\dfrac{3}{4}+\pi n,\ n\in\mathbb{Z}.$
7. $\dfrac{\pi}{6}+2\pi n,\ n\in\mathbb{Z}.$

8. $(-1)^{n+1}\arcsin\dfrac{\sqrt{3}-1}{2}+\pi n,\ \ n\in\mathbb{Z}.$
9. $\pm\dfrac{3\pi}{4}+2\pi n,\ n\in\mathbb{Z}.$
10. $\dfrac{\pi}{4}+\dfrac{\pi n}{2},\ n\in\mathbb{Z}.$
11. $\dfrac{\pi}{4}\pm\dfrac{1}{4}\arccos\dfrac{1}{3}+\dfrac{\pi n}{2},\ n\in\mathbb{Z}.$
12. $\dfrac{5\pi}{6}.$
13. $\dfrac{\pi}{2}+2\pi n,\ (-1)^k\dfrac{\pi}{6}+\pi k;$
$n,k\in\mathbb{Z},\ n\neq 0.$
14. $\dfrac{\pi}{2}+\pi n, \operatorname{arcctg}\left(\dfrac{1}{\sqrt{3}}-2\right)+\pi l;\ n,l\in\mathbb{Z}.$
15. $\pm\arcsin\dfrac{\pi}{6}+\pi n,\ n\in\mathbb{Z}.$
16. $\dfrac{3\pi}{4}+2\pi k,\ k\in\mathbb{Z}.$
17. $(-1)^{m+1}\dfrac{\pi}{4}+\pi m,\ m\in\mathbb{Z}.$
18. $\dfrac{(-1)^{n+1}}{2}\arcsin\dfrac{\sqrt{17}-3}{4}+\dfrac{\pi n}{2},\ n\in\mathbb{Z}.$
19. $(-1)^n\dfrac{\pi}{6}+\pi n,\ n\in\mathbb{Z}.$
20. $\pi-\arcsin\left(\dfrac{\pi}{12}\right);\ \pi+\arcsin\left(\dfrac{\pi}{6}\right).$

4.1.

1. 96 тонн.
2. 12 га; 9 га; 15 га.
3. $16+24+40+48.$
4. 147 ц/га.
5. $90\,\%$.
6. $7,2\,\%$.

4.2.

1. 20.
2. 96.
3. 53.
4. 18.
5. 129.
6. 242.
7. $1,2$.
8. $a_1=9;\ d=2.$
9. $5,5$ тонны; 4 тонны; $2,5$ тонны.
10. 50.
11. 28.
12. 70.
13. $a_1=a_2=a_3=7;$
$a_1=7(1-\sqrt{2}),\ a_2=7,\ a_3=7(1+\sqrt{2});$
$a_1=7(1+\sqrt{2}),\ a_2=7,\ a_3=7(1-\sqrt{2}).$
14. $a_1=2;\ d=3.$
15. 9.
16. 2.
17. 50.
18. -2.
19. 162.
20. Сумма первых восьми членов геометрической прогрессии больше суммы первых шести членов арифметической прогрессии.
21. 20.
22. 128π.

4.3.

1. 60 км/ч.
2. 15 км/ч.
3. 6 км/ч.
4. 80 км/ч.
5. 11 км/ч.
6. $106\dfrac{2}{3}$ км.
7. 16 км/ч.
8. 10 км/ч.
9. 3 часа.
10. В 4 раза.
11. В 9/7 раза.
12. 72 км/ч.
13. Скорость пароходов 15 км/ч, скорость реки 3 км/ч.
14. 50 км/ч, 100 км/ч.

4.4.

1. 19.
2. 168.
3. 15.
4. 6.

5. 8/3 часа.
6. 8 часов.
7. Да.

4.5.

1. На 25 %.
2. Снизится на четверть.
3. 100 кг.
4. 720 руб.
5. На 54 %.
6. 600.
7. 12500 руб.
8. 4 %.
9. 1000 л.
10. 6.
11. 1/15.

5.1.

1. -2.
2. 2.
3. 9.
4. 8.
5. $b+1-a$.
6. 0.
7. -2.
8. $\dfrac{5-8a}{6a+3}$.
9. $\dfrac{9}{7}$.
10. Имеют.
11. $[-4;2)\cup(3;4]$.
12. $3\log_8 26$.
13. $\sqrt{8}$.
14. Второе.
15. $-\dfrac{1}{\sqrt{3}}$.
16. Если $p=q=0$, то $\dfrac{1}{6}$; если $p\neq 0$ и $q\neq 0$, то $\dfrac{1}{6}\cdot\dfrac{p+q+pq}{p+q-2pq}$.

5.2.

1. $3,5$.
2. $(-1;+\infty)$.
3. $(2\log_7 3;+\infty)$.
4. 0,5.
5. 1.
6. 1.
7. 0.
8. -1.
9. 2.
10. $(3;+\infty)$.
11. $(-\infty;-1)$.
12. $\left[\log_4\dfrac{3}{4};+\infty\right)$.
13. $(0;+\infty)$.
14. $(-\infty;0)\cup(1;3)$.
15. $(-\sqrt{5};\sqrt{5})$.
16. $(25;+\infty)$.
17. $\log_{0,6} 2$.
18. $\log_2^2\dfrac{5}{4}$.
19. 2.
20. 4.
21. $(-\infty;2)$.
22. $[-10;5]$.
23. $-2+\sqrt{4-2\log_3 5}$.
24. 0.
25. $(-\infty;0)$.
26. $(-\infty;0)\cup\left(\dfrac{1}{2};+\infty\right)$.
27. Если $a<0$, то $x=2\log_2(-a)$; если $a=0$, то нет решений; если $a=1$, то $x=0$; если $0<a\neq 1$, то $x=\log_2 a$ или $x=2\log_2 a$.

5.3.

1. $0,5$.
2. $(-\infty;-2)\cup(7;+\infty)$.
3. -3.
4. $\dfrac{3}{2}$.

5. $\left(\dfrac{4}{5}; 4\right]$.
6. $\left[-\dfrac{6}{5}; -1\right) \cup \left(-\dfrac{1}{5}; 0\right]$.
7. $\left(1; \dfrac{3}{2}\right]$.
8. $(4; 2\sqrt{3}+1]$.
9. $(-3; -1)$.
10. $(-\infty; -2) \cup (2; +\infty)$.
11. $(-77; 3)$.
12. $(-\infty; -2) \cup [7; +\infty)$.
13. $\sqrt{3} - 2$.
14. $(-2; 3)$.
15. 2.
16. $-3; -2; 1$.
17. $\dfrac{1}{2}; 4\sqrt{2}$.
18. $\dfrac{1}{8}; 2$.
19. $4;\ 16$.
20. $\sqrt{17} - 4$.
21. $(2; 5]$.
22. $1;\ 3$.
23. $-\dfrac{15}{11}; 1$.
24. $(0; 1) \cup (1; 2]$.
25. $\left(0; \dfrac{1}{\sqrt{7}}\right) \cup (1; 49)$.
26. $(1; 2)$.
27. $\left[\dfrac{13}{50}; 9 + 4\sqrt{5}\right)$.
28. $\left(1; \dfrac{7}{2}\right]$.
29. $(-1; 0) \cup (0; 1) \cup [5; +\infty)$.
30. $\left(1; \dfrac{1+\sqrt{21}}{2}\right) \cup\ [3; +\infty)$.
31. $(-\infty; 0) \cup \left(\dfrac{7}{12}; \dfrac{2}{3}\right)$.
32. $\left(\dfrac{1}{2}; 1\right) \cup \left(1; \dfrac{3}{2}\right) \cup \left(\dfrac{3}{2}; 2\right)$.

5.4.

1. $0, 1$.
2. $(1; \log_3 2)$.
3. -1.
4. $\dfrac{4\pi}{3} + 4\pi n,\ n \in \mathbb{Z}$.
5. $1; 2 - \sqrt{10}$.
6. $(-\infty; 0)$.
7. $\dfrac{1}{4};\ 64$.
8. $(0; 1) \cup (1; 4) \cup (64; +\infty)$.
9. $\left(0; \dfrac{1}{4}\right) \cup \left(1; \dfrac{5}{4}\right)$.
10. $(-1)^n \dfrac{\pi}{6} + \pi n, n \in \mathbb{Z}$.
11. $\left(1 - \log_2 3; \dfrac{1}{6}\right)$.
12. $(-17; \log_2 5 + 1)$.
13. $\dfrac{1}{3};\ \dfrac{5}{3}$.
14. $\dfrac{\pi}{4} + \pi n,\ \dfrac{\pi}{2} + \pi m;\ n, m \in \mathbb{Z}$.
15. 4.
16. $\dfrac{9}{5}$.
17. 3.
18. $\left(0; \dfrac{1}{16}\right)$.
19. $\left[\dfrac{1}{2}; 1\right) \cup \left(2; \dfrac{5}{2}\right]$.
20. $-2;\ 0$.
21. $\log_2 3$.
22. $\left(\dfrac{1}{4}; \dfrac{1}{2}\right] \cup [2; +\infty)$.
23. $\pm\sqrt{\log_2 3}$.
24. $(0; 2)$.
25. $\dfrac{5}{4}$.
26. $(1; +\infty)$.
27. $(0; +\infty)$.
28. $\left(-1; \dfrac{1}{\sqrt{3}}\right) \cup \left(\dfrac{3}{2}; 9\right)$.

6.1.

1. -60°.
2. $\dfrac{\pi}{10} + \dfrac{2\pi n}{5},\ \dfrac{2\pi m}{5};\ n, m \in \mathbb{Z}$.

3. $\dfrac{\pi}{4}+\pi n,\ \dfrac{5\pi}{12}+\pi m;\ n,m\in\mathbb{Z}.$
4. $\dfrac{\pi}{2}+\pi n,\ \dfrac{5\pi}{12}+2\pi m,\ \dfrac{13\pi}{12}+2\pi k;$ $n,m,k\in\mathbb{Z}.$
5. $\arccos\dfrac{5}{\sqrt{29}}\pm\arccos\dfrac{3}{\sqrt{29}}+2\pi n,\ n\in\mathbb{Z}.$
6. $\dfrac{\pi}{2}+\pi n,\ \dfrac{1}{3}\operatorname{arctg}2+\dfrac{\pi m}{3};\ n,m\in\mathbb{Z}.$
7. $\pi+2\pi k,\ 2\arcsin\dfrac{\pi}{\sqrt{\pi^2+4}}+2\pi n;$ $k,n\in\mathbb{Z}.$
8. $\dfrac{5\pi}{12};\ \dfrac{53\pi}{84};\ \dfrac{59\pi}{84}.$
9. $[-\sqrt{29};\sqrt{29}].$
10. $1.$
11. $\dfrac{5\pi}{6}+2\pi n,\ n\in\mathbb{Z}.$
12. $\dfrac{\pi}{12}+2\pi n,\ \dfrac{3\pi}{4}+2\pi m;\quad n,m\in\mathbb{Z}.$
13. $-\operatorname{arctg}\dfrac{4}{3}+(-1)^n\dfrac{\pi}{6}+\pi n,\ n\in\mathbb{Z}.$

6.2.

1. $2.$
2. $-\operatorname{arctg}4+\pi n,\ \operatorname{arctg}\dfrac{1}{2}+\pi m;\ n,m\in\mathbb{Z}.$
3. $-\dfrac{\pi}{4}+\pi n,\ \operatorname{arctg}4+\pi k;\ n,k\in\mathbb{Z}.$
4. $\dfrac{\pi}{2}+\pi n,\ \dfrac{\pi}{3}+\pi m;\ n,m\in\mathbb{Z}.$
5. $\dfrac{\pi}{2}+\pi n,\ -\operatorname{arctg}\dfrac{1}{2}+\pi m;\ n,m\in\mathbb{Z}.$
6. $\dfrac{\pi}{4}+\pi m,\ \dfrac{\pi}{3}+\pi n;\ n,m\in\mathbb{Z}.$
7. $\operatorname{arctg}3+2\pi n,\ \pi-\operatorname{arctg}3+2\pi k;$ $n,k\in\mathbb{Z}.$
8. $-\dfrac{\pi}{4}\pm\dfrac{\pi}{4}+2\pi k,\quad k\in\mathbb{Z}.$

6.3.

1. $45^\circ.$
2. $(\pm30^\circ+n\cdot180^\circ;\ 90^\circ+m\cdot360^\circ);$ $n,m\in\mathbb{Z}.$
3. $\left(\dfrac{\pi}{6};0\right),\ \left(\dfrac{\pi}{6};-\dfrac{\pi}{6}\right),\ \left(\dfrac{\pi}{6};-\pi\right).$
4. $\left(\dfrac{\pi}{24}+\pi n;\ \dfrac{5\pi}{24}-\pi n\right),$ $\left(\dfrac{5\pi}{24}+\pi m;\ \dfrac{\pi}{24}-\pi m\right);\ n,m\in\mathbb{Z}.$
5. $\left(\dfrac{\pi}{6}+2\pi n;\ (-1)^{k+1}\dfrac{\pi}{3}+\pi k\right),$ $\left(\dfrac{5\pi}{6}+2\pi m;\ (-1)^l\dfrac{\pi}{3}+\pi l\right);$ $n,k,m,l\in\mathbb{Z}.$
6. $\pm\sqrt{3}.$
7. $\left(-\dfrac{2}{7};\ \pm\arcsin\dfrac{2}{\sqrt{7}}+\pi m\right);\ m,k\in\mathbb{Z};$ $\left(-\dfrac{3\pi+2}{7};\ \pm\arcsin\sqrt{\dfrac{4-\pi}{7}}+\pi k\right).$
8. $\left(\pi n;\dfrac{\pi}{4}-\pi n\right),\ \left(\dfrac{\pi}{4}+\pi m;-\pi m\right);$ $n,m\in\mathbb{Z}.$
9. $\left(\dfrac{\pi}{4}+2\pi k;\ \operatorname{arctg}2+\pi m\right);\quad k,m\in\mathbb{Z}.$
10. $\left(\dfrac{\pi}{4};\pi-\operatorname{arctg}\dfrac{1}{\sqrt{2}}\right),$ $\left(\dfrac{3\pi}{4};\pi-\operatorname{arctg}\dfrac{1}{\sqrt{2}}\right).$
11. $\left(\pm\dfrac{\pi}{4}+2\pi n;(-1)^k\dfrac{\pi}{3}+\pi k\right),$ $\left(\pm\dfrac{\pi}{6}+2\pi m;(-1)^q\dfrac{\pi}{4}+\pi q\right);$ $n,k,m,q\in\mathbb{Z}.$
12. $\left(\dfrac{\pi}{2}+2\pi n;\pi-2\pi n\right),\ n\in\mathbb{Z}.$
13. $\left(\dfrac{\pi}{12};-\dfrac{\pi}{12}\right),\ \left(\dfrac{5\pi}{12};-\dfrac{5\pi}{12}\right).$
14. $(\pi;\pm\pi),\ (2\pi;0).$
15. $\left((-1)^{n+1}\dfrac{\pi}{8}+\dfrac{\pi n}{2};\ -\dfrac{1}{5}\operatorname{arctg}\dfrac{1}{\sqrt{2}}+\dfrac{\pi m}{5}\right);$ $n,m\in\mathbb{Z}.$
16. $\dfrac{\pi}{12};\ \dfrac{11\pi}{12}.$
17. $(-1)^n\arcsin\dfrac{1}{3}+\pi n,\ n\in\mathbb{Z}.$
18. $\left(\sqrt[3]{\dfrac{\pi}{4}-1};\ \dfrac{\pi}{4\sqrt[3]{\dfrac{\pi}{4}-1}}\right),$ $\left(\sqrt[3]{\operatorname{arctg}\dfrac{1}{2}-1};\ \dfrac{\operatorname{arctg}\dfrac{1}{2}}{\sqrt[3]{\operatorname{arctg}\dfrac{1}{2}-1}}\right).$

6.4.

1. $0.$
2. $\dfrac{\pi}{2}+2\pi k,\ k\in\mathbb{Z}.$

3. Решений нет.
4. $\frac{\pi}{2} + 2\pi m,\ m \in \mathbb{Z}$.
5. $\frac{\pi}{2} + \pi k,\ 2\pi m;\ k, m \in \mathbb{Z}$.
6. $\pi + 2\pi n,\ \frac{\pi}{2} + 2\pi k;\ n, k \in \mathbb{Z}$.
7. $2\pi n,\ \frac{\pi}{2} + 2\pi k;\ n, k \in \mathbb{Z}$.
8. Решений нет.
9. $\pi + 2\pi k,\ k \in \mathbb{Z}$.
10. Решений нет.
11. Решений нет.
12. 0.
13. $1;\ 4$.
14. 0.
15. Решений нет.
16. $\frac{\pi}{2} + 2\pi n,\ n \in \mathbb{Z}$.
17. 0.
18. $\frac{5\pi}{6} + 2\pi n,\ n \in \mathbb{Z}$.
19. $-\frac{7}{4};\ \frac{1}{4}$.

7.1.

1. На последнем.
9. $\frac{2\pi}{3} + 4\sqrt{2 - \sqrt{3}}$.
10. $y_{\max} = 3$ при $2 \le x \le 3$.

7.2.

1. 16.
2. $\frac{\pi}{2} + 1$.
3. 32.
4. 15.
5. $\frac{\pi}{8}$.
6. $\frac{\pi}{2} + 1$.
7. $2\pi + 7$.
8. $27\pi + 18$.
9. 1.

7.3.

1. $\left(\frac{3}{2}; -\frac{5}{2}\right)$.
2. $\left(\frac{1}{2}; 1\right)$.
3. $4;\ \frac{3}{2}$.
4. $(-2; 0)$.
5. Нет решений.
6. $\frac{60}{13}$.
7. Если $a \in (-\infty; -1) \cup (1; +\infty)$, то $x = 1$; если $a \in (-1; 1)$, то $x = 1$ и $x = \frac{a+7}{a-1}$; если $a = -1$, то $x \in [-3; 1]$; если $a = 1$, то $x \in [1; +\infty)$.
8. 6.

8.1.

1. $2\pi - 1$.
2. $-5 + 4e$.
3. 2.
4. 0.
5. $3e$.
6. 2.
7. -8.
8. $0,25e^2$.
9. 0.
10. 12.
11. 1.

8.2.

1. 10.
2. 2.
3. 0.
4. 4.
5. 9.
6. 6.
7. 2.
8. 27.
9. -7.

10. 1.
11. $16+6\pi$.
12. 200; 50; 50; 40 м.

8.3.

1. $\dfrac{x^2}{2}+\sin x$.
2. $x^2+\ln x$.
3. $2x-e^x$.
4. $e^x+\sin x-2$.
5. -13.
6. $2\sin x-2$.
7. 15.
8. 4.
9. 6.
10. 9.
11. 8.

9.1.

1. $\dfrac{6}{5}$ часов.
2. $\dfrac{2}{5}$.
3. 5 км.
4. 60 км/ч.
5. 6 км/ч.
6. 20 км.
7. $11:00$.

9.2.

1. Первое.
2. 1; 2.
3. 17.
4. 2.
5. 1; 2; 4; 8.
6. $-3,6$.
7. 20 м.
8. $-3\sqrt[4]{\dfrac{51}{196}}$.
9. $5+\dfrac{1}{5^{29}}$.
10. 33.

9.3.

1. 9 кг.
2. 15 кг.
3. 2 кг.
4. 100 г.
5. 2 л.
6. 10 л и 20 л.
7. 15 т.
8. 170 кг.
9. 9 кг.
10. Не менее $1,4$ декалитра.
11. 5.
12. $90\,\%$.
13. Глицерина $0,5$ л; воды $3,5$ л.
14. 3 л.

9.4.

1. $(3;2)$, $(3;-2)$, $(-3;2)$, $(-3;-2)$.
2. $(1;5)$, $(7;-97)$, $(-7;-99)$, $(-1;-9)$.
3. $(5;\pm2)$, $(-5;\pm2)$, $(11;\pm10)$, $(-11;\pm10)$.
4. $x=2$, $y=2$.
5. $(\pm4;1)$, $(\pm4;-3)$.
6. $(13;32)$, $(-5;-16)$, $(-13;-32)$, $(5;16)$.
7. 11 оценок «2», 7 оценок «3», 10 оценок «4» и две оценки «5».
8. $(0;0)$, $(-3;-5)$, $(3;5)$.
9. $(12;-8)$.
10. 144 человека.
11. 5 прессов.
12. 8 шт.
13. 16 автобусов.

10.1.

1. 2; 3.
2. $(-\infty;-2+2\sqrt{3})\cup(2\sqrt{2};+\infty)$.
3. $[-6;-1]\cup[0;+\infty)$.
4. $(-6;6)$.

5. $\left(-\infty;-\frac{5}{4}\right]\cup\left\{-\frac{1}{4}\right\}$.
6. $-9;-8;-6;-5$.
7. $(-\infty;0]\cup[1;2]\cup[5;+\infty)$.
8. а) $(3;4)\cup(4;7)$;
   б) $(-13;-4)\cup(-4;-1)$.
9. $(0;-6)$ и $(t;6-t)$, где $t\le 2$.
10. $(-3;\ -\sqrt{6}]\cup\left[\sqrt{6};\ \frac{5}{2}\right]\cup(5,\ +\infty)$.
11. а) $\left[4;\frac{13}{2}\right)$; б) $\left[-\frac{9}{2};-\frac{13}{4}\right)$.
12. а) $\{-1\}\cup(1;3)\cup(4;6]$;
    б) $\{1;2\}\cup(1;3)\cup[5;6]$.
13. а) $0<x<\dfrac{2a^2b}{a^2+b^2}$.
    б) $[-c;0)$ при $c<d$,
    $\left(-\dfrac{2c^2d}{c^2+d^2};0\right)$ при $c\ge d$.
14. а) Если $a<-1$, то
    $0<x\le -a-\sqrt{a^2-1}$ или
    $-a+\sqrt{a^2-1}\le x\le -a+\sqrt{a^2+1}$;
    если $a\ge -1$, то $0<x\le -a+\sqrt{a^2+1}$.
    б) Если $a<-1$, то $x\in(-\infty;0)\cup$
    $(0;a+\sqrt{a^2+1})\cup$
    $(-a-\sqrt{a^2-1};-a+\sqrt{a^2-1})$;
    если $a\ge -1$, то $x\in(-\infty;0)\cup$
    $(0;a+\sqrt{a^2+1})$.

10.2.

1. $\frac{\pi}{2}+\pi n,\ \operatorname{arctg}2+\pi+2\pi m$,
   $-\operatorname{arctg}2+2\pi k;\ n,m,k\in\mathbb{Z}$.
2. $-\frac{1}{2};\ \frac{\pi}{2}+\pi n,\ n\in\mathbb{Z}$.
3. $\frac{\pi}{2}+2\pi n,\ -\frac{\pi}{4}+2\pi m;\ n,m\in\mathbb{Z}$.
4. $\frac{\pi}{4}+2\pi n,\ \frac{\pi}{2}+2\pi m;\ n,m\in\mathbb{Z}$.
5. $\pi\pm\arccos\frac{1}{5}+2\pi n,n\in\mathbb{Z}$.
6. $\pm\frac{\pi}{4}+2\pi n,\ \pi m;\ \ n,m\in\mathbb{Z}$.
7. $\pi+2\pi k,\ (-1)^n\frac{\pi}{12}+\frac{\pi n}{2};\ \ k,n\in\mathbb{Z}$.
8. $-\arccos\left(-\frac{1}{3}\right)+2\pi k,\ \pi n;\ k,n\in\mathbb{Z}$.
9. $2\pi n,\ -\frac{3\pi}{4}+2\pi m;\ \ n,m\in\mathbb{Z}$.
10. $-\frac{2\pi}{3}+2\pi m,\ m\in\mathbb{Z}$.
11. $(1;-1),\ (-1;-3)$.
12. $\frac{\pi}{4}+\frac{\pi k}{2},\ \frac{5\pi}{12}+\frac{\pi n}{2};\ k,n\in\mathbb{Z}$.
13. 9.
14. $\dfrac{-\pi+2}{2},\ \dfrac{3\pi+2}{2},\ \dfrac{\pm\pi+2}{6}$,
    $\dfrac{\pm 11\pi+2}{6},\ \dfrac{-3\pi+2}{6},\ \dfrac{9\pi+2}{6}$.

10.3.

1. $1/4$.
2. $0;\ 1$.
3. $(-\infty;-12)\bigcup\left(-\frac{1}{6};0\right)\bigcup\left(\frac{1}{6};+\infty\right)$.
4. $(3;+\infty)$.
5. $\left(-\frac{1}{3};0\right)\cup(0;1)$.
6. $\left(-2;-\frac{13}{7}\right)\bigcup(5;+\infty)$.
7. $\left(-\infty;-\frac{5}{3}\right]\bigcup\left[0;\frac{1}{3}\right)$.
8. $7^{\frac{-3\pm\sqrt{2}}{7}};\ \frac{1}{7}$.
9. $\left[-3;-\frac{17}{7}\right)\bigcup\left(-\frac{17}{7};-\frac{7}{3}\right]$.
10. $\left[\frac{1}{6};+\infty\right)$.
11. $[\log_3 4;3]$.
12. $\left(-2;-\sqrt{2}\right)\cup\left(\sqrt{2};2\right)$.
13. $\left[\frac{\sqrt{2}-16}{48};-\frac{7}{24}\right)\bigcup\left(-\frac{1}{6};\frac{\sqrt{2}-2}{6}\right]$.
14. $(7/9;\ +\infty)$.
15. $\pm\frac{\pi}{3}+2\pi n,\ n\in\mathbb{Z}$.

11.1.

1. $-2,5$.
2. $1,5$.
3. $-\frac{4}{3};\ -\frac{2}{3}$.
4. $\{-1\}\cup[2;+\infty)$.

5. $\{-4\} \cup [-3; +\infty)$.
6. $\left[\frac{1}{5}; \frac{1}{4}\right] \bigcup \left\{\frac{2}{5}\right\}$.
7. $[-2; -1] \cup \{3\}$.
8. $-\sqrt{5}$.
9. $[-3; -1)$.
10. $\left[-\frac{7}{4}; -\frac{2}{3}\right) \bigcup \left[\frac{17+\sqrt{127}}{9}; 8\right)$.
11. $\left(0; -\frac{7}{2}\right)$; $(21; 21)$.
12. $[-1; 2] \cup [3; 4]$.
13. 3.
14. $\left(-1; \sqrt{2}\,\right]$.
15. $\left[\frac{4\pi}{9}; \sqrt{8}\left(\sqrt{3}-1\right)\right) \ \cup\ \{\log_3 28\}$.

11.2.

1. $\pi n,\ \pm\frac{2\pi}{3} + 2\pi m;\ n, m \in \mathbb{Z}$.
2. $\pi n,\ \frac{\pi}{2} + 2\pi m;\ n, m \in \mathbb{Z}$.
3. $\frac{\pi}{14} + \frac{\pi n}{7},\ \frac{\pi}{10} + \frac{\pi m}{5};\ n, m \in \mathbb{Z}$.
4. $2\pi n,\ -\frac{\pi}{4} + \pi m;\ n, m \in \mathbb{Z}$.
5. $\frac{\pi n}{2},\ \pm\frac{2\pi}{3} + 2\pi m,\ n, m \in \mathbb{Z}$.
6. $\frac{\pi n}{2},\ \pm\arcsin\sqrt{\frac{2}{3}} + \pi k;\ n, k \in \mathbb{Z}$ (второй вариант ответа $\frac{\pi n}{2}$, $\frac{\pi}{2} \pm \frac{1}{2}\arccos\frac{1}{3} + \pi m;\ n, m \in \mathbb{Z}$).
7. 810°.
8. $\frac{\pi}{4} + \frac{\pi n}{2},\ \pm\frac{\pi}{3} + \pi m;\ n, m \in \mathbb{Z}$.
9. $\pi n,\ \frac{\pi}{6} + 2\pi m;\ n, m \in \mathbb{Z}$.
10. $\frac{\pi}{2} + \pi n,\ -\frac{2\pi}{3} + 2\pi k;\ n, k \in \mathbb{Z}$.
11. $\frac{\pi}{6} + 2\pi n,\ \frac{\pi}{4} + \pi m;\ n, m \in \mathbb{Z}$.
12. $\left((-1)^n\frac{\pi}{4} + \pi n; \frac{\pi}{2} + \pi m\right);\ n, m \in \mathbb{Z}$.
13. $\frac{\pi n}{2},\ \pm\frac{\pi}{6} + \pi k;\ n, k \in \mathbb{Z}$.
14. $\pi/2$.
15. $\pi + 2\pi m, -2\,\mathrm{arctg}\,3 + 2\pi s;\ m, s \in \mathbb{Z}$.
16. $\frac{\pi}{8} + \frac{\pi n}{4},\ \frac{\pi}{20} + \frac{\pi m}{10}, n = 0; \pm 1; 2;$ $m = -2; 0, \pm 1; 3; 4; 5; 6$.
17. $-\frac{23\pi}{6};\ -\frac{19\pi}{6};\ -\frac{11\pi}{6}; -4\pi + 4\arccos\frac{9}{10}$.

11.3.

1. $\left\{\frac{1}{2}\right\} \cup (1; +\infty)$
2. $\{5\} \cup (4 + \sqrt{2}; +\infty)$.
3. $\frac{1}{6}; 2$.
4. $\frac{4}{3};\ 3$.
5. $1;\ \frac{\sqrt{3}}{8}$.
6. $2;\ 9$.
7. $(0; 4) \cup \{8\}$.
8. -1.
9. $\log_{\frac{9}{2}}(\sqrt{2} - 1)$.
10. $(-\infty; 0] \cup \left\{\frac{3}{2}\right\}$.
11. $\log_{\frac{3}{2}}\frac{1+\sqrt{13}}{6}$.
12. $\left(0; \frac{1}{50}\right) \bigcup \left(\frac{25}{2}; +\infty\right)$.
13. $\left(3; \frac{7}{2}\right) \cup (4; +\infty)$.
14. $(-\infty; \log_3 2] \cup (1; 5)$.
15. Одно.
16. $(-\infty; -\sqrt{3}) \cup (\log_3 4; \sqrt{3})$.
17. $(\log_7 6, 1) \cup (\log_7 11, +\infty)$.
18. $\left[\frac{2}{9}; \frac{1}{2}\right)$.
19. $(-\infty; -1) \cup \left(\frac{7-\sqrt{5}}{2}; 3\right) \cup$ $\cup \left(4; \frac{7+\sqrt{5}}{2}\right) \cup (8; +\infty)$.
20. $\left(-\frac{1}{\sqrt{2}}; -\frac{1}{\sqrt{3}}\right) \bigcup \left(\frac{1}{\sqrt{3}}; \frac{1}{\sqrt{2}}\right)$.
21. $\left(0; \frac{1}{7}\right) \bigcup \left(\frac{1}{2}; 1\right)$.
22. $\left[1 - \sqrt{3}; \frac{3-\sqrt{5}}{2}\right] \bigcup \left(2; \frac{5}{2}\right)$.

11.4.

1. Три.
2. $\left(\frac{1}{3}; 3\right]$.
3. $\pm\frac{1}{2}$; $\pm\frac{3}{2}$; ± 2.
4. $\sqrt{2}$; $\frac{\pi}{2} + 2\pi m,\ m \in \mathbb{Z}$.
5. $[-\log_2 3; 2) \cup \left(2; \log_2 \frac{13}{3}\right)$.
6. $\frac{2\pi}{3} + 2\pi n,\ (-1)^k \frac{\pi}{6} + \pi k;\ n, k \in \mathbb{Z}$.
7. $(\pi + 2\pi n; \log_3(\pi + 2\pi n))$, $\left(\frac{\pi}{6} + 2\pi m; \log_3\left(\frac{\pi}{6} + 2\pi m\right)\right)$, $\left(\frac{5\pi}{6} + 2\pi k; \log_3\left(\frac{5\pi}{6} + 2\pi k\right)\right)$; $n, m, k \in \mathbb{N}_0$.
8. $\left\{\frac{\pi}{14}; \frac{3\pi}{14}; \frac{5\pi}{14}; \frac{9\pi}{14}; \frac{11\pi}{14}; \frac{13\pi}{14}\right\}$.
9. $(-4; 1) \cup \left(1; \frac{5}{3}\right) \cup \left(\frac{5}{3}; 11\right)$.
10. $(-1; 0) \cup (0; 2)$.
11. $(-\sqrt{10}; -\pi) \cup (-\pi; -3) \cup (3; \pi) \cup (\pi; \sqrt{10})$.
12. $\left(\frac{6}{11}; \frac{10}{11}\right)$.
13. $\left(-2; -\frac{3}{2}\right] \cup \{-1\}$.
14. $\left[1; \frac{\pi}{2}\right] \cup \{3\}$.
15. $(1; 0)$.
16. $\pm\frac{1}{6}$; $\pm\sqrt{3}$; $\pm\frac{11}{6}$.
17. $\frac{\pi}{6}$.
18. Если $a = 0$, то $x \leq 3$; если $0 < a < \frac{1}{12}$, то $x \leq \frac{1 - \sqrt{1 - 12a}}{2a}$ или $x \geq \frac{1 + \sqrt{1 - 12a}}{2a}$; если $a \geq \frac{1}{12}$, то $x \in \mathbb{R}$.
19. -1; $\sqrt{2}$.

ГЕОМЕТРИЯ

1.1.

1. $35^\circ, 55^\circ$.
2. $6{,}5$.
3. 4.
4. 12.
5. 120.
6. $21^\circ, 69^\circ$.
7. $90^\circ, 65^\circ, 25^\circ$.
8. 3:2.
9. 10.
10. 24.
11. 6.
12. 3/4.
13. 25.
14. 6.
15. $3\sqrt{2}$.
16. 16.
17. 30.

1.2.

1. Да.
2. Тупоугольный.
3. 28.
4. 25.
5. $\alpha,\ \frac{\pi}{2} - \alpha,\ \frac{\pi}{2}$ или $2\alpha,\ \frac{\pi}{2} - \alpha,\ \frac{\pi}{2} - \alpha$.
6. $2\arccos\frac{3}{4},\ \frac{\pi}{2} - 2\arccos\frac{3}{4}$.
7. $\sqrt{7}$.
8. $5\sqrt{\frac{3}{7}}$.
9. $\sqrt{5}$.
10. $\frac{\sqrt{15}}{3}$.
11. $\sqrt{801}$.
12. 24.
13. $\sqrt{\frac{3}{13}}$.
14. $\frac{\sqrt{15}(11 - \sqrt{51})}{10}$.

1.3.

3. 294.
4. $9\sqrt{5},\ 8\sqrt{10}$.
5. 4.

6. 18.
7. $(\pi-\alpha)/2$.
8. $|\alpha-\beta|/2$.
9. Остроугольный.
10. Тупоугольный.
11. $\sqrt{5}$.
12. 4.
14. $\sqrt{b^2+bc}$.
17. $27/2$.
18. $\dfrac{\sqrt{3}}{4}$; 5.
19. 60.
20. $35/32$.

1.4.

1. $1:2$.
2. $2:3$.
3. $18\sqrt{2}$.
4. $(\sqrt{3}+1):2,\ (\sqrt{6}+2):1$.
5. 12,5.
6. 6.
7. 20.
8. $30^\circ,\ 60^\circ$.
9. 25.
10. 30°.
12. $\cos^2\alpha$.
13. 30°.
14. $2\sqrt{2}-2$.
15. 15.
16. $4,5$.
17. $2\sqrt{S_1S_2}$.
18. $(\sqrt{S_1}+\sqrt{S_2}+\sqrt{S_3})^2$.

1.5.

1. 12.
2. 8,125.
3. $1:3$.
4. В 4 раза.
5. $(\sqrt{2}+1)\ :\ 1$, начиная с вершины, противолежащей основанию.
6. $9:1$.
7. Не изменится.
8. 13.
9. 3.
10. $1:6$.
11. $115/16$.
12. $\dfrac{3\sqrt{3}(\sqrt{13}-1)}{32\pi}$.
13. 6.
14. $\dfrac{1}{30}\sqrt{(4b^2-c^2)(4c^2-b^2)}$.
15. $\dfrac{36(6+5\sqrt{2})}{13}$.
16. 15.
17. ΔACO.
18. 1) $\dfrac{16}{3}$, вне треугольника;
    2) $\dfrac{8\sqrt{5}}{3}$, внутри.
19. $\dfrac{24\sqrt{2}}{35}$.

2.1.

1. 10.
2. 15.
3. 80.
4. 48.
5. 63°.
6. 8.
7. $\arcsin(3/5),\ \arcsin(4/5)$.
8. $\dfrac{2+\sqrt{3}}{4}$ или $\dfrac{1}{4}$.
10. 62°.
11. $36^\circ,\ 36^\circ,\ 108^\circ$.
12. $\angle A'=\beta+\gamma-\alpha$,
    $\angle B'=\alpha+\gamma-\beta$,
    $\angle C'=\beta+\alpha-\gamma$.
13. $\sqrt{ba}$.
14. $\dfrac{2mn}{n-m}$.
17. Да.

2.2.

3. 16.
4. 17.
5. 20.
6. 4 или 9.

7. 70.
8. $4+\sqrt{7};\ 4-\sqrt{7}$.
9. 15.
10. 6.
11. $\sqrt{5}$.
12. $\dfrac{1820\sqrt{21}}{341}$.
13. 3.
14. 6.
15. $\arccos(-\sqrt{6}/4)$.

2.3.

1. 25.
2. 25.
3. $23/2$.
4. 11.
5. 10.
6. $3:1$.
7. 2.
8. 1.
9. $2\sqrt{Rr}$
10. $\dfrac{1+\sin(\alpha/2)}{1-\sin(\alpha/2)}$
12. $h^2\operatorname{ctg}(\alpha/2)$.
13. $\dfrac{\sqrt{3}}{\sin 68^\circ}$.
14. $\sqrt{6}$.
15. $\sqrt{10}$
16. $2\sqrt{6}$.
17. $3\sqrt{2}$.
18. $\angle BOC = 112,5^\circ$.
19. $\dfrac{Rr}{\left(\sqrt{r}+\sqrt{R}\right)^2}$.
20. $R_4 = \dfrac{R_1R_2}{R_3}$.

3.1.

1. 98°.
2. 30 см.
3. 510 см^2.
4. 4.
5. 170.
6. $a^2(1+\sqrt{3})/4$.
7. 28.
8. 12.
9. 10.
10. 44.
11. 80.
13. 30.
14. $\sqrt{a^2+c^2-b^2}$.
16. $2\sqrt{\dfrac{7}{19}}$.

3.2.

1. 14.
2. $1{,}5$.
3. 25.
4. 12.
5. $a:b$.
7. $AB > BD$.
8. $(a-b)/2$.
9. $\sqrt{ab}$.
10. a^2.
12. 8.
13. $\angle BAC > \angle CAD$.
14. 7.
15. $\arcsin(2/\pi)$.
16. 98.
17. 1.
18. Нет.
19. $126\sqrt{3}$.

3.3.

1. 12.
2. 2880°.
3. $\dfrac{\sqrt{2}}{2}$.
4. $\pi(2+\sqrt{2})/2$.
5. 30.
6. 6.
7. 10.
8. 10.
9. 2.
10. 6.

11. 10.
12. Угол между биссектрисами двух противоположных углов равен полуразности двух других углов.
13. Четырехугольник, у которого диагонали взаимно перпендикулярны.
14. Квадрат.
18. Точка пересечения диагоналей.

4.1.

2. 90°.
5. $(-4; 4)$.
6. $3;\ 3$.
7. $3\overline{a}+\overline{b}$.
8. $(1,75;\ 0,25)$.
9. -4.
10. $\sqrt{85}/2$.
11. $2x-y-1=0$.
12. $3x+2y-6=0$.
13. $x+2y-10=0$.
14. -4.
15. $\frac{3}{4}\left(\overline{NP}-\overline{NM}\right)$.
16. $\frac{1}{4}\overline{AC}-\frac{1}{2}\overline{AB}$.
17. $\frac{4}{5}\overline{CB}+\frac{1}{5}\overline{CD}$.

5.1.

1. 768.
2. 80.
3. 90.
4. 90.
5. 30.
6. $0,6$.
7. $0,5$.
8. 18.
9. 72.
10. На три равные части.

5.2.

1. 90.
2. 3.
3. 2,25.
4. 16.
5. 864.
6. 4.
7. $2\sqrt{2}$.
8. 45°.

6.1.

1. 36.
2. 36.
3. 48.
4. 2.
5. 12.
6. 12.
7. $0,2$.
8. 4.

6.2.

3. 2.
4. 1.
5. 10.
6. 3.
7. 5.
8. 36.
9. 60.

6.3.

1. 9.
2. 15.
3. 1200.
4. 3.
5. 30.
6. 216.
7. 16.
8. 4.
9. 28.
10. 128/41.

7.1.

1. 60.
2. 30.
3. 24.
4. $0,25$.
5. 144.
6. 106π.
7. 300.
8. 50.

7.2.

1. 6.

2. 20.
3. 45.
4. 1.
5. 4.
6. 24.
7. 12π.
8. 6π.

7.3.

1. 10.
2. 16.
3. 3.
4. 3.
5. 10.
6. 13.
7. 336.
8. 2.
9. 36.

8.1.

1. $(1;-3;2)$.
2. $\arccos\sqrt{\dfrac{2}{15}}$.
4. 2.
5. $m=7,5;\ n=0,8$.
6. 90°.
7. $\arccos\dfrac{1}{\sqrt{3}}$.
10. -5.
11. $\overline{(0;2;1)}$.
12. $\overline{(-3;-1;4)}$.
13. $2x-z=0$.
14. $|d/a|,\ |d/b|,\ |d/c|$.
15. $(2;1;0)$.
17. $x-2y+2z=0$.

Литература

1. *Федотов М. В., Разгулин А. В.* Алгебра. Подготовка к вступительным экзаменам в МГУ. – М.: МАКС Пресс, 2007. – 260 с.

2. *Федотов М. В., Хайлов Е. Н.* Задачи устного экзамена по математике.– М.: МАКС Пресс, 2002. – 144 с.

3. Математика. Задачи вступительных экзаменов по математике в МГУ имени М. В. Ломоносова с ответами и решениями (1999-2004 гг.) *Сост. Е. А. Григорьев.* – М.: Изд-во УНЦ ДО, 2005. –399 с.

4. Варианты вступительных экзаменов по математике в МГУ (2000-2002, 2003, 2004 гг.). – М.: Механико-математический факультет МГУ.

5. *Глазков Ю. А., Варшавский И. К., Гаиашвили М. Я.* Математика. Единый государственный экзамен. Решение задач группы В. – М.: Изд-во "Экзамен", 2009. – 382 с.

6. *Сергеев И. Н.* Математика. Единый государственный экзамен. Задания типа С. – М.: Изд-во "Экзамен", 2009. – 318 с.

7. *Денищева Л. О., Бойченко Е. М., Глазков Ю. А. и др.* Единый государственный экзамен 2003-2004: Контрольные измерительные материалы: Математика. – М.: Просвещение, 2003. – 191 с.

8. *Денищева Л. О., Рязановский А. Р., Семенов П. В., Сергеев И. Н.* ЕГЭ 2008. Математика. Федеральный банк экзаменационных материалов. – М.: Эксмо, 2008. – 240 с.

9. *Галеев Э. М.* Подготовка к ЕГЭ по математике. Задания типа В и С. – М.: Издательство ЦПИ при механико-математическом факультете МГУ, 2009. – 96 с.

Минимальные системные требования определяются соответствующими требованиями программы Adobe Reader версии не ниже 11-й для платформ Windows, Mac OS, Android, iOS, Windows Phone и BlackBerry; экран 10"

Учебное электронное издание

Серия: «ВМК МГУ — школе»

Золотарёва Наталья Дмитриевна
Попов Юрий Александрович
Семендяева Наталья Леонидовна
Федотов Михаил Валентинович

МАТЕМАТИКА.
СБОРНИК ЗАДАЧ ПО БАЗОВОМУ КУРСУ

Учебно-методическое пособие

Подписано к использованию 19.03.15. Формат 145×225 мм

Издательство «БИНОМ. Лаборатория знаний»
125167, Москва, проезд Аэропорта, д. 3
Телефон: (499) 157-5272
e-mail: info@pilotLZ.ru, http://www.pilotLZ.ru

ВМК МГУ – ШКОЛЕ

Развитие и широкое распространение компьютеров вызывают насущную потребность в высококвалифицированных специалистах в области прикладной математики, вычислительных методов и информатики. Сегодня наш факультет – один из основных факультетов Московского университета, ведущий учебный и научный центр России в области фундаментальных исследований и образования по прикладной математике, информатике и программированию.

Высокая квалификация преподавателей и сотрудников факультета, сочетание их глубокого теоретического и практического опыта являются залогом успешной работы наших выпускников в ведущих научных центрах, промышленных, коммерческих и других учреждениях.

Факультет не только учит студентов, но и ведет большую работу со школьниками и учителями:

– на факультете работают вечерняя математическая школа, подготовительные курсы и компьютерные курсы для школьников;

– для учителей есть курсы повышения квалификации и ежегодно проводятся летние школы по математике и информатике;

– сотрудники факультета и преподаватели других факультетов МГУ, работающие на подготовительных курсах факультета, готовят учебные и методические пособия по математике, информатике и физике как для школьников, так и для учителей.

Мы рады видеть новых студентов и приветствуем новых партнеров в научном сотрудничестве и инновационной деятельности.

Декан факультета вычислительной математики и кибернетики МГУ им. М. В. Ломоносова, академик РАН ***Е. И. Моисеев***

Сайт факультета ВМК МГУ:

http://www.cs.msu.ru